



ASTRONOMIJA

priprema za natjecanje

1. razred srednje škole

Skripta za samostalno učenje

Tri razine natjecanja:

I. školska • **II.** županijska • **III.** državna

Svaka razina podijeljena je u poglavlja s teorijom, riješenim primjerima, ilustracijama te zadacima za ponavljanje. Rješenja se nalaze na kraju skripte.

Kako koristiti ovu skriptu

Skripta prati gradivo natjecanja iz astronomije za 1. razred srednje škole i podijeljena je u tri **razine**, redom prema težini:

- **Školska razina** – astrognozija, mjerenje udaljenosti, gibanje Zemlje i nebeska sfera, brzina svjetlosti.
- **Županijska razina** – planetarna gibanja (Keplerovi zakoni, kozmičke brzine) i elektromagnetsko zračenje. *Pretpostavlja poznavanje cijele školske razine.*
- **Državna razina** – opći zakon gravitacije i elementi staza. *Pretpostavlja poznavanje obiju prethodnih razina.*

Unutar svakog poglavlja naići ćeš na obojene okvire:

- **Definicija** temeljni pojam ili zakon koji moraš znati napamet.
- **Ključne relacije** formule sažete na jednom mjestu.
- **Riješeni primjer** potpuno proveden račun – najprije pokušaj sam!
- **Zanimljivost** kontekst i povijest koji pomažu razumijevanju.
- **Zadaci** na kraju poglavlja; rješenja su u zadnjem dijelu skripte.

Savjet: astronomija je spoj fizike i geometrije. Crtaj skice (nebesku sferu, trokute), prati mjerne jedinice kroz cijeli račun i provjeravaj red veličine rezultata.

Korisne konstante i podatci

Brzina svjetlosti u vakuumu	$c = 299\,792\,458\text{ m/s} \approx 3,00 \cdot 10^8\text{ m/s}$
Gravitacijska konstanta	$G = 6,674 \cdot 10^{-11}\text{ N m}^2\text{ kg}^{-2}$
Astronomska jedinica	$1\text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11}\text{ m}$
Svjetlosna godina	$1\text{ ly} = 9,461 \cdot 10^{15}\text{ m} = 63\,241\text{ AU}$
Parsek	$1\text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16}\text{ m} = 3,26\text{ ly} = 206\,265\text{ AU}$
Planckova konstanta	$h = 6,626 \cdot 10^{-34}\text{ J s}$
Wienova konstanta	$b = 2,898 \cdot 10^{-3}\text{ m K}$
Stefan-Boltzmannova konst.	$\sigma = 5,670 \cdot 10^{-8}\text{ W m}^{-2}\text{ K}^{-4}$
Masa Sunca	$M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30}\text{ kg}$
Polumjer Sunca	$R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8\text{ m}$
Sjaj (luminozitet) Sunca	$L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}\text{ W}$
Masa Zemlje	$M_{\oplus} = 5,972 \cdot 10^{24}\text{ kg}$
Polumjer Zemlje	$R_{\oplus} = 6,371 \cdot 10^6\text{ m}$
Ubrzanje slob. pada (Zemlja)	$g = 9,81\text{ m/s}^2$
Zvezdani (siderički) dan	$23\text{ h }56\text{ min }4\text{ s} \approx 86\,164\text{ s}$
Površinska temperatura Sunca	$T_{\odot} \approx 5\,780\text{ K}$

Sadržaj

Kako koristiti ovu skriptu	1
I ŠKOLSKA RAZINA	3
1 Astrognozija – snalaženje na zvjezdanom nebu	4
1.1 Nebeska sfera	4
1.2 Zviježđa i asterizmi	4
1.3 Cirkumpolarna zviježđa	4
1.4 Zviježđa godišnjih doba	5
1.5 Opažanje planeta	6
2 Mjerenje udaljenosti u astronomiji	9
2.1 Jedinice za mjerenje astronomskih udaljenosti	9
2.2 Metoda trigonometrijske paralakse	9
2.3 Zvezdane veličine (magnitude)	10
2.3.1 Prividna zvjezdana veličina	10
2.3.2 Apsolutna veličina i modul udaljenosti	11
3 Gibanje Zemlje i pojave na nebeskoj sferi	13
3.1 Horizontski koordinatni sustav	13
3.2 Ekvatorski koordinatni sustav	13
3.2.1 Visina nebeskog pola i kulminacije	14
3.3 Satni kut i zvjezdano vrijeme	15
3.4 Revolucija Zemlje i godišnja doba	15
3.5 Sunčevo i zvjezdano vrijeme	15
4 Brzina svjetlosti	18
4.1 Olaf Römer i prvo mjerenje (1676.)	18
4.2 Vrijeme putovanja svjetlosti	19
4.3 Svjetlost kao val: $c = \lambda\nu$	19
II Županijska razina	21
5 Planetarna gibanja	23
5.1 Osnove nebeske mehanike	23
5.2 Keplerovi zakoni	23
5.3 Kozmičke brzine	25
6 Elektromagnetsko zračenje	27
6.1 Elektromagnetski spektar	27
6.2 Zračenje crnoga tijela	27
6.2.1 Wienov zakon pomaka	28
6.2.2 Stefan–Boltzmannov zakon	28

III	Državna razina	30
7	Elementi staza i opći zakon gravitacije	32
7.1	Newtonov opći zakon gravitacije	32
7.1.1	Iz gravitacije slijedi treći Keplerov zakon	32
7.2	Energija na stazi	32
7.3	Elementi staze	33
	Rješenja zadataka	36
	Rješenja zadataka	37
	Poglavlje 1 — Astrognozija	37
	Poglavlje 2 — Mjerenje udaljenosti	37
	Poglavlje 3 — Gibanje Zemlje i pojave na nebeskoj sferi	37
	Poglavlje 4 — Brzina svjetlosti	38
	Poglavlje 5 — Planetarna gibanja	38
	Poglavlje 6 — Elektromagnetsko zračenje	39
	Poglavlje 7 — Elementi staza i opći zakon gravitacije	39

Dio I

ŠKOLSKA RAZINA

1 | Astrognozija – snalaženje na zvjezdanom nebu

Astrognozija je dio astronomije koji se bavi prepoznavanjem zvijezda, zvijezda i drugih nebeskih tijela te snalaženjem na nebu. Prije svakog računa moramo znati *gdje* i *kada* nešto na nebu vidimo.

1.1 Nebeska sfera

Kad noću gledamo nebo, čini nam se kao da su sve zvijezde jednako udaljene – raspoređene po unutrašnjosti golemog svoda. Tu zamišljenu plohu zovemo nebeskom sferom.

Nebeska sfera

Nebeska sfera je zamišljena kugla proizvoljno velikog polumjera, sa središtem u promatraču (ili u središtu Zemlje), na koju projiciramo položaje svih nebeskih tijela. Na njoj očitavamo *smjerove*, a ne udaljenosti.

Najvažnije točke i kružnice nebeske sfere (Slika 1.1):

- **Zenit** (Z) – točka točno iznad glave; **nadir** – točka točno ispod nogu.
- **Horizont** – velika kružnica koja dijeli vidljivo (gornje) od nevidljivog (donjeg) dijela neba.
- **Nebeski polovi** (P , P') – točke u kojima os vrtnje Zemlje probada nebesku sferu. U blizini sjevernoga pola nalazi se zvijezda *Sjevernjača* (Polaris).
- **Nebeski ekvator** – projekcija Zemljina ekvatora; velika kružnica okomita na os.
- **Nebeski meridijan** – kružnica kroz zenit i oba pola; spaja sjever i jug.
- **Ekliptika** – prividni godišnji put Sunca po nebeskoj sferi (o njoj više u 3. poglavlju).

Zbog vrtnje Zemlje od zapada prema istoku, nebeska sfera nam se *prividno* okreće od istoka prema zapadu. To dnevno (*diurnalno*) gibanje uzrokuje izlazak i zalazak zvijezda. Visina sjevernoga nebeskog pola nad horizontom jednaka je geografskoj širini promatrača – to je temeljna veza astrognozije.

1.2 Zvijezda i asterizmi

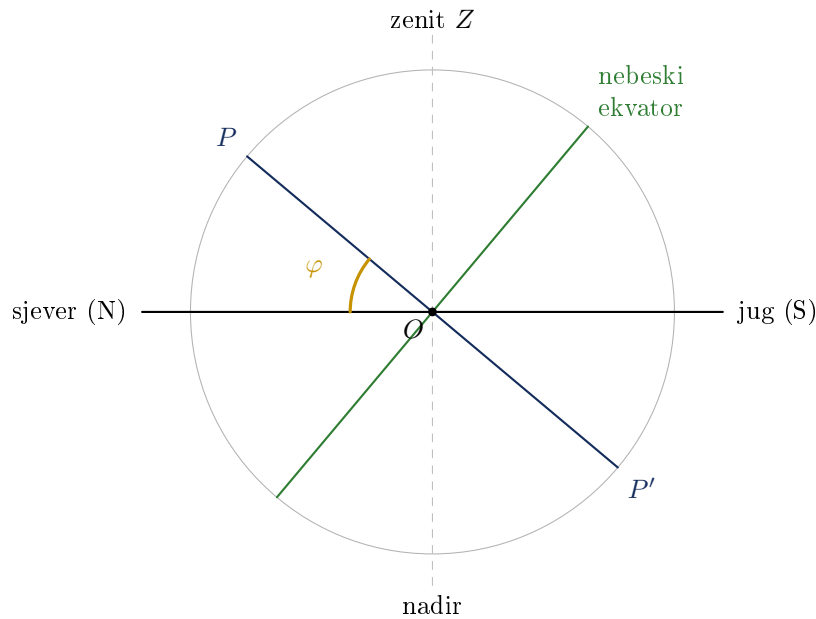
Zvijezde i asterizam

Zvijezde je jasno omeđeno područje neba; Međunarodna astronomska unija (IAU) priznaje ukupno **88 zvijezda**. **Asterizam** je samo upadljiv, lako pamtljiv lik zvijezda koji nije službeno zvijezde (npr. *Velika kola* unutar Velikoga medvjeda ili *Ljetni trokut*).

Zvijezde unutar istoga zvijezda najčešće nisu fizički povezane – samo se nalaze u približno istom smjeru gledanja, dok su njihove stvarne udaljenosti vrlo različite. Najsajnije zvijezde zvijezda označavaju se grčkim slovima po Bayerovoj oznaci (α , β , γ ..., redom uglavnom po opadanju sjaja) i genitivom latinskog imena zvijezda: tako je α Lyrae upravo Vega.

1.3 Cirkumpolarna zvijezda

Tijekom dnevnoga gibanja svaka zvijezda opisuje kružnicu usporednu s nebeskim ekvatorom. Zvijezde dovoljno blizu nebeskoga pola nikada ne zađu pod horizont – nazivamo ih **cirkumpolarnima**.



Slika 1.1: Presjek nebeske sfere u ravni meridijana. Visina sjevernoga pola P nad sjevernim horizontom jednaka je geografskoj širini φ promatrača.

Uvjet cirkumpolarnosti

Za promatrača na sjevernoj geografskoj širini φ zvijezda deklinacije δ je **cirkumpolarna** (nikad ne zalazi) ako vrijedi

$$\delta \geq 90^\circ - \varphi$$

Zvijezda **nikad ne izlazi** (uvijek je pod horizontom) ako je $\delta \leq -(90^\circ - \varphi)$.

Za Hrvatsku je $\varphi \approx 45^\circ$, pa su cirkumpolarne sve zvijezde s $\delta \geq 45^\circ$. Tipična cirkumpolarna zvijezda našega neba jesu: **Mali medvjed** (Ursa Minor) sa Sjevernjačom, **Veliki medvjed** (Ursa Major), **Kasiopeja** (Cassiopeia), **Cefej** (Cepheus) i **Zmaj** (Draco). Sva ona kruže oko Sjevernjače (Slika 1.2).

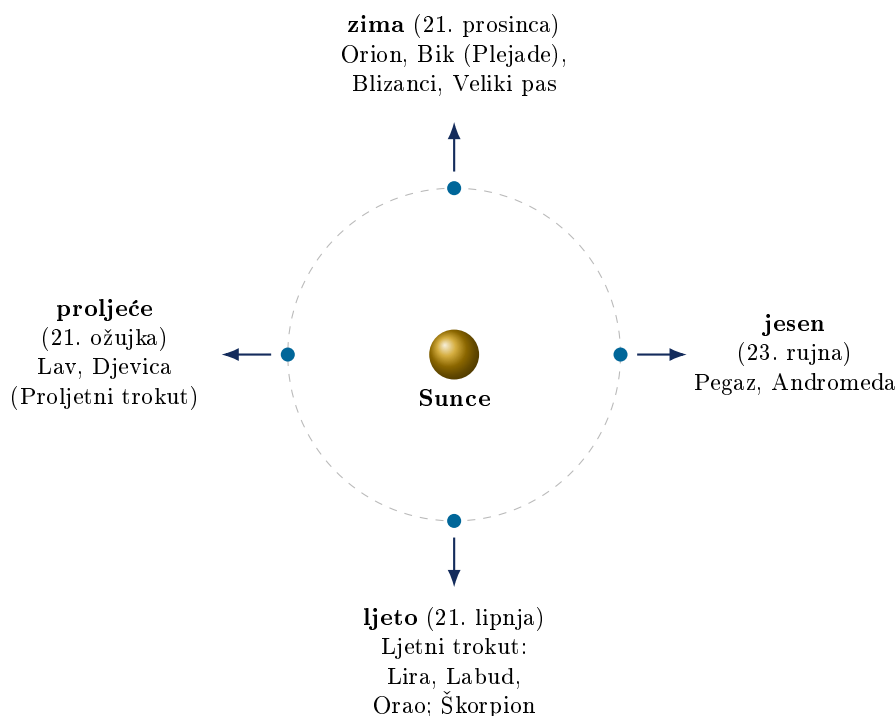


Slika 1.2: Tragovi zvijezda oko sjevernoga pola tijekom noći. Kružnice manje od visine pola φ u cijelosti su nad horizontom (cirkumpolarne); veće sijeku horizont, pa te zvijezde izlaze i zalaze.

1.4 Zvijezda godišnjih doba

Jer Zemlja obilazi oko Sunca, noćna strana Zemlje tijekom godine gleda u različite smjerove svemira. Zato u svakom godišnjem dobu navečer dominiraju druga zvijezda (Slika 1.3). Sunce

nam danju „zaklanja” zvijezda koja su u njegovu smjeru, a vidimo ona nasuprot Suncu.



Slika 1.3: Zemlja na četiri položaja u obilasku oko Sunca. Strelice pokazuju smjer noćnoga neba (suprotno od Sunca); zato svako godišnje doba ima svoja prepoznatljiva zvijezda.

Doba	Glavna zvijezda	Karakteristični asterizam / objekt
Proljeće	Lav, Djevica, Volar, Berenikina kosa	Proljetni trokut: Arktur, Spika, Regul
Ljeto	Lira, Labud, Orao, Škorpion, Strijelac	Ljetni trokut: Vega, Deneb, Altair; Mliječna staza
Jesen	Pegaz, Andromeda, Perzej, Ovan, Ribica	Pegazov kvadrat; galaktika M31 u Andromedi
Zima	Orion, Bik, Blizanci, Veliki i Mali pas, Kočijaš	Zimski trokut: Sirius, Procion, Betelgez; Plejade

1.5 Opažanje planeta

Riječ „planet” dolazi od grčke riječi za *lutalicu* – za razliku od zvijezda, planeti mijenjaju položaj među zvijezdama. Budući da se sve velike planetske staze nalaze gotovo u istoj ravnini, planete (kao i Mjesec i Sunce) uvijek nalazimo blizu **ekliptike**.

Unutarnji i vanjski planeti

Unutarnji (donji) planeti – Merkur i Venera – bliže su Suncu od Zemlje. Na nebu se nikad ne udalje mnogo od Sunca, pa ih vidimo samo nakratko nakon zalaska ili prije izlaska Sunca, i pokazuju *mijene* poput Mjeseca.

Vanjski (gornji) planeti – Mars, Jupiter, Saturn... – dalje su od Sunca od Zemlje i mogu

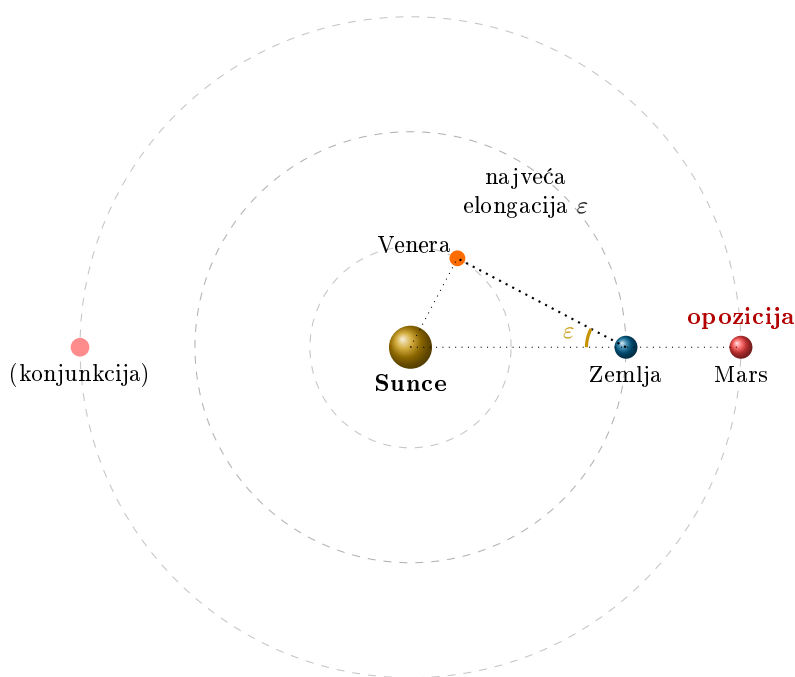
biti na nebu nasuprot Suncu.

Položaji planeta

Elongacija je kut između Sunca i planeta gledan sa Zemlje. Unutarnji planet najlakše opažamo u **najvećoj elongaciji** (Merkur do $\sim 28^\circ$, Venera do $\sim 47^\circ$).

Opozicija je položaj u kojem je vanjski planet nasuprot Suncu (Sunce–Zemlja–planet): tada izlazi pri zalasku Sunca, vidljiv je cijelu noć, najbliži je Zemlji i najsjajniji – to je najbolje vrijeme za opažanje.

Konjunkcija je položaj u kojem je planet u smjeru Sunca, pa je teško vidljiv ili nevidljiv.



Slika 1.4: Pogled na Sunčev sustav „odozgo”. Venera (unutarnji planet) najbolje se vidi u najvećoj elongaciji ε ; Mars (vanjski planet) najbolje se vidi u opoziciji, a slabo u konjunkciji.

Planet od zvijezde najlakše razlikujemo po tome što planeti *ne trepere* jako (vide se kao maleni diskovi, a ne kao točke) i što se s noći na noć pomiču u odnosu na zvijezde. Najsjajnija nebeska tijela (osim Sunca i Mjeseca) često su upravo Venera i Jupiter.

Zanimljivost

Veneru zbog velikoga sjaja zovemo *Zornjača* kad je vidljiva ujutro, odnosno *Večernjača* kad je vidljiva navečer. Stari su je narodi ponekad smatrali dvama različitim tijelima!

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Napiši uvjet da zvijezde bude cirkumpolarno za promatrača na geografskoj širini φ i navedi tri cirkumpolarna zvijezda za Hrvatsku.
2. Na kojoj se visini nad horizontom nalazi sjeverni nebeski pol za promatrača u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$)?

3. Objasni vlastitim riječima zašto u različitim godišnjim dobima navečer vidimo različita zvijezda.
4. Kojem asterizmu pripadaju zvijezde Vega, Deneb i Altair? A zvijezde Betelgez, Sirius i Procion?
5. Zašto Veneru nikada ne možemo vidjeti visoko na nebu oko ponoći? Što je elongacija?
6. Mars je u opoziciji. U koje doba dana izlazi i koliko je dugo te noći vidljiv? Zašto je tada najsjajniji?
7. (*Račun*) Za koju geografsku širinu φ zvijezda deklinacije $\delta = 60^\circ$ postaje *granično* cirkumpolarna (dotiče horizont u donjoj kulminaciji)?
8. (*Račun*) Zvijezda ima deklinaciju $\delta = -70^\circ$. Može li se ikada vidjeti iz Zagreba ($\varphi = 45,8^\circ$)? Obrazloži računom.

2 | Mjerenje udaljenosti u astronomiji

Udaljenosti u svemiru toliko su velike da metri ili kilometri postaju nepraktični. Zato astronomi uvode posebne jedinice i domišljate metode mjerenja. U ovom poglavlju upoznajemo jedinice, metodu paralakse i sustav zvjezdanih veličina kojim opisujemo sjaj.

2.1 Jedinice za mjerenje astronomskih udaljenosti

Tri osnovne jedinice

Astronomska jedinica (AU) – srednja udaljenost Zemlje od Sunca:

$$1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m.}$$

Svjetlosna godina (ly) – udaljenost koju svjetlost prijeđe u jednoj godini:

$$1 \text{ ly} = c \cdot t = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m} = 63\,241 \text{ AU.}$$

Parsek (pc) – udaljenost s koje se polumjer Zemljine staze (1 AU) vidi pod kutom od jedne lučne sekunde ($1''$):

$$1 \text{ pc} = 3,086 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3,26 \text{ ly} = 206\,265 \text{ AU.}$$

Svjetlosna godina je *jedinica udaljenosti*, a ne vremena – česta pogreška! Broj 206 265 koji se pojavljuje kod parseka jednostavno je broj lučnih sekundi u jednom radijanu: $206265'' = 1 \text{ rad}$.

2.2 Metoda trigonometrijske paralakse

Najizravnija metoda mjerenja udaljenosti bliskih zvijezda jest **paralaksa**. Ispruži palac i gledaj ga naizmjenice lijevom pa desnim okom – palac se „pomiče” u odnosu na pozadinu. Isto vrijedi za blisku zvijezdu kad je gledamo iz dvaju krajeva Zemljine staze (Slika 2.1).

Godišnja paralaksa

Godišnja paralaksa p jest kut pod kojim bi se sa zvijezde vidio polumjer Zemljine staze (1 AU). Udaljenost zvijezde tada je

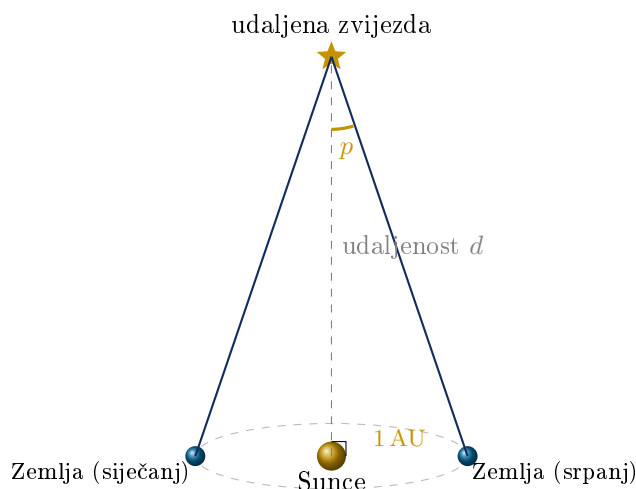
$$d[\text{pc}] = \frac{1}{p[']}$$

gdje je p izražen u lučnim sekundama. Što je zvijezda dalja, paralaksa je manja.

Odakle formula? U pravokutnom trokutu Sunce–Zemlja–zvijezda vrijedi $\tan p = \frac{a}{d}$. Kutovi su sićušni, pa je $\tan p \approx p$ (u radijanima). Pretvorbom u lučne sekunde ($1 \text{ rad} = 206265''$) i uvrštavanjem $a = 1 \text{ AU}$ dobivamo $d[\text{AU}] = \frac{206265}{p[']}$, a kako je $206\,265 \text{ AU} = 1 \text{ pc}$, slijedi $d[\text{pc}] = 1/p[']$.

Primjer 2.1

Zvijezdi izmjerimo paralaksu $p = 0,10''$. Kolika joj je udaljenost u parsecima i svjetlosnim godinama?



Slika 2.1: Mjerenje paralakse. Gledana iz dvaju krajeva Zemljine staze (razmak 2 AU), bliska zvijezda prividno se pomiče u odnosu na daleku pozadinu. Kut p (pod kojim se 1 AU vidi sa zvijezde) izravno daje udaljenost. U stvarnosti je p vrlo malen ($< 1''$); ovdje je jako uvećan.

Rješenje: $d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,10} = 10$ pc. Kako je $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly}$, slijedi $d = 10 \cdot 3,26 = 32,6 \text{ ly}$.

Primjer 2.2

Nama najbliža zvijezda, Proxima Centauri, ima paralaksu $p = 0,768''$. Kolika je njezina udaljenost?

Rješenje: $d = \frac{1}{0,768} = 1,30 \text{ pc} = 1,30 \cdot 3,26 = 4,24 \text{ ly}$. Svjetlosti od nje treba više od četiri godine da stigne do nas.

Zanimljivost

Paralakse su tako malene da ih je tek 1838. prvi izmjerio F. W. Bessel (za zvijezdu 61 Cygni). Svemirske misije *Hipparcos* i osobito *Gaia* izmjerile su paralakse milijardama zvijezda, s točnošću boljom od milijunke lučne sekunde.

2.3 Zvezdane veličine (magnitude)

Sjaj zvijezda opisujemo **zvezdanom veličinom** (magnitudom). Sustav potječe od starogrčkog astronoma Hiparha, koji je najsjajnije zvijezde nazvao zvijezdama 1. veličine, a najslabije vidljive golim okom zvijezdama 6. veličine. *Manja* magnituda znači *veći* sjaj.

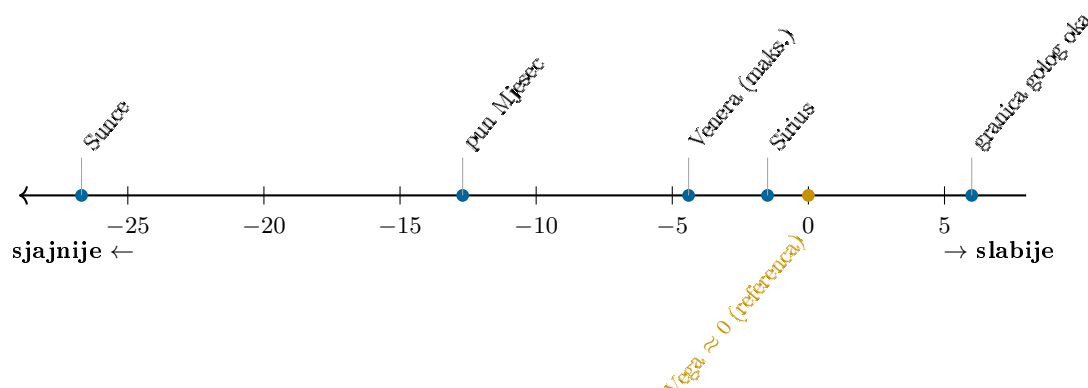
2.3.1 Prividna zvezdana veličina

Pogsonova relacija

Razlika prividnih veličina dviju zvijezda povezana je s omjerom njihovih tokova zračenja (osvjetljenja) F :

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \frac{F_1}{F_2}$$

Razlika od **5 magnituda odgovara omjeru sjaja od točno 100 puta** ($100 = 10^{5/2,5}$).



Slika 2.2: Skala prividnih veličina. Što je objekt sjajnije, to mu je veličina (magnituda) *manja* (lijevo). Sunce ima $m \approx -26,7$, a najslabije zvijezde vidljive golim okom imaju $m \approx +6$.

Primjer 2.3

Sirius ima $m_1 = -1,46$, a Vega $m_2 = 0,00$. Koliko je puta Sirius sjajniji od Vege?

Rješenje: iz Pogsonove relacije

$$\frac{F_1}{F_2} = 10^{-\frac{m_1 - m_2}{2,5}} = 10^{-\frac{-1,46 - 0}{2,5}} = 10^{0,584} \approx 3,8.$$

Sirius je oko 3,8 puta sjajniji od Vege.

2.3.2 Apsolutna veličina i modul udaljenosti

Prividna veličina ovisi o udaljenosti: sjajna, ali daleka zvijezda može izgledati slabije od blize slabe zvijezde. Da bismo usporedili *stvarni* sjaj, uvodimo apsolutnu veličinu.

Apsolutna veličina i modul udaljenosti

Apsolutna veličina M jest prividna veličina koju bi zvijezda imala kad bi bila na standardnoj udaljenosti od 10 pc. Veza prividne m i apsolutne M veličine jest **modul udaljenosti**:

$$m - M = 5 \log_{10} d - 5 \quad (d \text{ u parsecima}).$$

(Sunce ima $M_{\odot} \approx +4,8$ – s udaljenosti od 10 pc bilo bi tek osrednja zvijezda na granici vidljivosti.)

Primjer 2.4

Zvijezda ima prividnu veličinu $m = 7,0$ i apsolutnu veličinu $M = 2,0$. Kolika joj je udaljenost?

Rješenje: modul udaljenosti je $m - M = 7,0 - 2,0 = 5,0$. Iz formule:

$$5,0 = 5 \log d - 5 \Rightarrow \log d = 2 \Rightarrow d = 10^2 = 100 \text{ pc}.$$

Ključne relacije

$$1 \text{ pc} = 3,26 \text{ ly} = 206\,265 \text{ AU} \quad d[\text{pc}] = \frac{1}{p['']}$$

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log_{10} \frac{F_1}{F_2} \quad m - M = 5 \log_{10} d - 5$$

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Objasni razliku između svjetlosne godine i parseka. Koja je od njih veća i za koliko?
2. Zvijezda ima paralaksu $p = 0,025''$. Izračunaj udaljenost u pc i u ly.
3. Zvijezda je udaljena 5 pc. Koliku paralaksu ima?
4. Dvije zvijezde razlikuju se u sjaju za točno 100 puta. Za koliko se magnituda razlikuju njihove prividne veličine?
5. Zvijezda A ima $m_A = 1,0$, zvijezda B ima $m_B = 6,0$. Koja je sjajnija i koliko puta?
6. Zvijezda ima $m = 10,0$ i nalazi se na $d = 1000 \text{ pc}$. Kolika joj je apsolutna veličina M ?
7. (*Izazov*) Zvijezda ima paralaksu $p = 0,05''$ i prividnu veličinu $m = 9,0$. Najprije izračunaj udaljenost, a zatim apsolutnu veličinu M .

3 | Gibanje Zemlje i pojave na nebeskoj sferi

Nebo nad nama nije statično: zvijezde izlaze i zalaze, Sunce mijenja položaj tijekom godine, a zvijezda se izmjenjuju sa sezonama. Sve su to posljedice dvaju gibanja Zemlje — **rotacije** oko vlastite osi i **revolucije** oko Sunca. Da bismo precizno opisali gdje se neki objekt nalazi na nebu, trebamo koordinatne sustave.

3.1 Horizontski koordinatni sustav

Najprirodniji način da opišemo položaj objekta jest s obzirom na ono što vidimo: obzor i točku iznad glave. To je **horizontski (mjesni) koordinatni sustav**. On je vezan uz promatrača i njegov trenutak — isti objekt ima različite horizontske koordinate s različitih mjesta i u različito vrijeme.

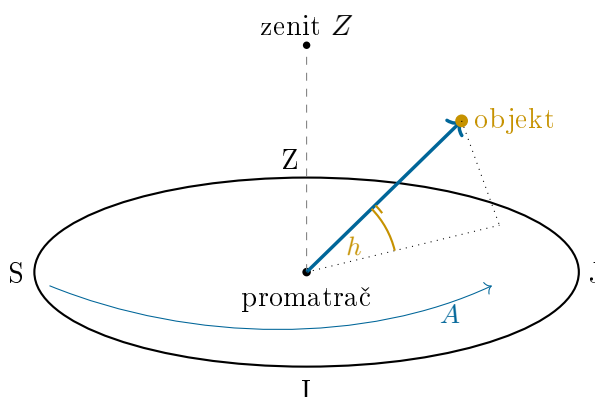
Horizontske koordinate

Visina h jest kut objekta iznad obzora, mjereno od 0° (na obzoru) do 90° (u zenitu).

Azimut A jest kut duž obzora, najčešće mjereno od sjevera prema istoku (0° = sjever, 90° = istok, 180° = jug, 270° = zapad).

Umjesto visine često se rabi **zenitna udaljenost**

$$z = 90^\circ - h.$$



Slika 3.1: Horizontski koordinatni sustav. Visina h mjeri se okomito od obzora do objekta, a azimut A vodoravno duž obzora (ovdje od sjevera S preko istoka). Zenitna udaljenost je $z = 90^\circ - h$.

3.2 Ekvatorski koordinatni sustav

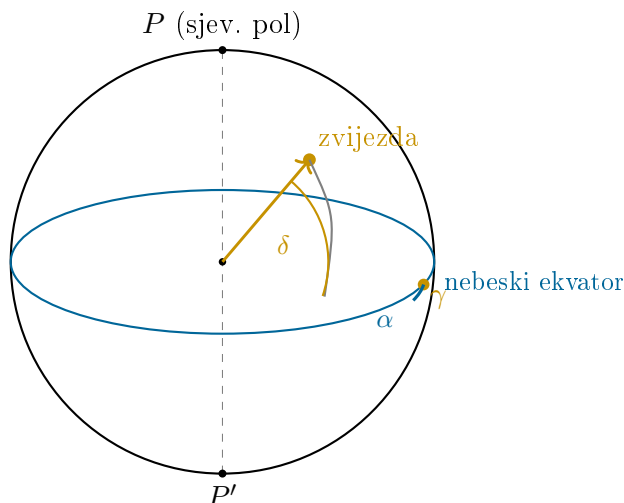
Horizontske koordinate stalno se mijenjaju zbog rotacije Zemlje, pa nisu pogodne za kataloge zvijezda. Zato uvodimo **ekvatorski koordinatni sustav**, koji je vezan uz nebesku sferu, a ne uz promatrača — u njemu zvijezde imaju (gotovo) stalne koordinate.

Zamislimo da Zemljin ekvator i Zemljinu os projiciramo na nebesku sferu. Tako dobivamo **nebeski ekvator** i **nebeske polove** (sjeverni P i južni P').

Ekvatorske koordinate

Deklinacija δ jest kutna udaljenost objekta od nebeskog ekvatora, od -90° (južni pol) do $+90^\circ$ (sjeverni pol). Analogna je zemljopisnoj širini.

Rektascenzija α jest kut duž nebeskog ekvatora, mjeren od *proljetne točke* γ prema istoku, obično u *satnoj mjeri* (0^h do 24^h , gdje je $24^h = 360^\circ$, dakle $1^h = 15^\circ$). Analogna je zemljopisnoj dužini.



Slika 3.2: Ekvatorski koordinatni sustav. Deklinacija δ mjeri se od nebeskog ekvatora prema polu, a rektascenzija α duž ekvatora od proljetne točke γ . Polovi P i P' projekcije su Zemljine osi.

3.2.1 Visina nebeskog pola i kulminacije

Veza promatračeve zemljopisne širine φ i izgleda neba vrlo je jednostavna i vrlo važna za natjecanja:

Ključne relacije – nebeska sfera

Visina nebeskog pola iznad obzora jednaka je zemljopisnoj širini:

$$h_{\text{pol}} = \varphi$$

Gornja kulminacija (najveća visina objekta, kad prelazi meridijan):

$$h_{\text{max}} = 90^\circ - |\varphi - \delta|.$$

Donja kulminacija (najmanja visina, na suprotnoj strani meridijana):

$$h_{\text{min}} = \delta + \varphi - 90^\circ.$$

Primjer 3.1

Na kojoj se visini u gornjoj kulminaciji vidi zvijezda deklinacije $\delta = +20^\circ$ iz Zagreba ($\varphi = 45,8^\circ$)?

Rješenje:

$$h_{\text{max}} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - |45,8^\circ - 20^\circ| = 90^\circ - 25,8^\circ = 64,2^\circ.$$

Zvijezda u gornjoj kulminaciji dosegne visinu od oko 64° iznad južnog obzora.

Primjer 3.2

Sunce u trenutku ljetnog suncostaja ima deklinaciju $\delta = +23,5^\circ$. Koliko je visoko u podne (gornja kulminacija) u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$)?

Rješenje:

$$h_{\max} = 90^\circ - |45,8^\circ - 23,5^\circ| = 90^\circ - 22,3^\circ = 67,7^\circ.$$

Zato je ljeti Sunce visoko i dani su dugi. U zimskom suncostaju ($\delta = -23,5^\circ$) bilo bi $h_{\max} = 90^\circ - 69,3^\circ = 20,7^\circ$ — mnogo niže.

3.3 Satni kut i zvjezdano vrijeme

Da bismo povezali ekvatorske koordinate s onim što je trenutno na nebu, uvodimo **satni kut** H — kut između meridijana promatrača i satne kružnice objekta, mjeren prema zapadu. On raste s vremenom kako se objekt kreće nebom.

Zvjezdano vrijeme

Zvjezdano vrijeme θ jest satni kut proljetne točke γ . Za bilo koji objekt vrijedi temeljna veza

$$\theta = H + \alpha$$

gdje je H satni kut, a α rektascenzija objekta. Kad objekt kulminira (prelazi meridijan), $H = 0$, pa je $\theta = \alpha$.

3.4 Revolucija Zemlje i godišnja doba

Zemlja obiđe Sunce za jednu godinu po gotovo kružnoj putanji. Os Zemljine rotacije nagnuta je za $\varepsilon \approx 23,5^\circ$ u odnosu na okomicu na ravninu putanje (ekliptiku). Taj nagib — a *ne* promjena udaljenosti od Sunca — uzrok je godišnjih doba.

Česta zablude

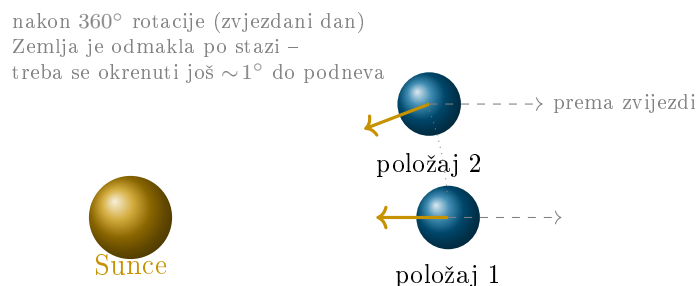
Godišnja doba **nisu** posljedica toga što je Zemlja ljeti bliže Suncu. Zapravo je Zemlja najbliže Suncu (perihel) početkom siječnja, usred zime na sjevernoj polutki! Godišnja doba nastaju zbog nagiba osi: ljeti je polutka nagnuta prema Suncu, zrake padaju strmije i dan je dulji.

Prividni put Sunca po nebeskoj sferi tijekom godine zove se **ekliptika**. Ona siječe nebeski ekvator u dvjema točkama — proljetnoj (γ) i jesenskoj točki. U te dvije točke (ekvinociji, oko 21. ožujka i 23. rujna) dan i noć traju jednako. U suncostajima (oko 21. lipnja i 21. prosinca) Sunce je najsjevernije, odnosno najjužnije.

3.5 Sunčevo i zvjezdano vrijeme

Postoje dvije vrste „dana”. **Zvjezdani dan** jest vrijeme za koje se Zemlja okrene za točno 360° s obzirom na zvijezde. **Sunčev dan** jest vrijeme od jednog podneva do drugog — od jedne gornje kulminacije Sunca do iduće. Oni nisu jednaki!

Budući da Zemlja u jednoj godini ($\approx 365,25$ dana) napravi jedan puni dodatni okret oko Sunca, kroz godinu se nakupi točno jedan zvjezdani dan viška. Zato je zvjezdani dan kraći:



Slika 3.3: Zašto je sunčev dan dulji od zvjezdano. Dok se Zemlja okrene za 360° (zvjezdani dan), ona se istodobno pomakne po stazi oko Sunca, pa se mora okrenuti još otprilike 1° da bi Sunce opet bilo na meridijanu. (Pomak je na slici uvelike pretjeran.)

Trajanje dana

$$\text{zvjezdani dan} = 23^{\text{h}} 56^{\text{m}} 04^{\text{s}} \approx 86\,164 \text{ s}$$

$$\text{sunčev dan} = 24^{\text{h}} = 86\,400 \text{ s}$$

Razlika je oko $3^{\text{m}} 56^{\text{s}} \approx 4$ minute na dan. Zato iste zvijezde izlaze svaki dan oko 4 minute ranije, pa se tijekom godine izmjenjuju sezonska zviježđa.

Primjer 3.3

Za koliko minuta ranije izađe neka zvijezda svake večeri u odnosu na prethodnu?

Rješenje: u 365,25 dana nakupi se razlika od jednog punog dana ($24^{\text{h}} = 1440 \text{ min}$):

$$\frac{1440 \text{ min}}{365,25} \approx 3,94 \text{ min} \approx 4 \text{ min.}$$

Zato za mjesec dana zvijezda izađe oko $30 \times 4 = 120 \text{ min} = 2$ sata ranije.

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Objasni razliku između horizontskog i ekvatorskog koordinatnog sustava. Zašto se za zvjezdane kataloge rabi ekvatorski?
2. Koje su koordinate objekta u zenitu (horizontske)? A koliku zenitnu udaljenost ima objekt na obzoru?
3. Na kojoj se visini vidi sjeverni nebeski pol iz mjesta sa zemljopisnom širinom $\varphi = 45^\circ$?
4. Zvijezda ima deklinaciju $\delta = +35^\circ$. Na kojoj je visini u gornjoj kulminaciji gledano iz Splita ($\varphi = 43,5^\circ$)?
5. Zašto nastaju godišnja doba? Navedi i objasni najčešću zabluđu.
6. Koliko stupnjeva odgovara 1^{h} rektascenzije? A koliko 1^{m} (minuta) rektascenzije u stupnjevima?
7. Zvjezdani dan kraći je od sunčeva za otprilike 4 minute. Objasni *zašto*, koristeći se gibanjem Zemlje oko Sunca.

8. (*Izazov*) Sunce u proljetnoj ravnodnevici ima $\delta = 0^\circ$. Na kojoj je visini u podne u Osijeku ($\varphi = 45,55^\circ$)? Koliko tada (približno) traje dan?

4 | Brzina svjetlosti

Svjetlost se ne širi trenutačno, nego ima konačnu, iako vrlo veliku brzinu. Spoznaja o tome jedno je od najvažnijih otkrića u povijesti znanosti i temelj je cijele moderne astronomije: jer svjetlost putuje konačnom brzinom, gledajući u svemir zapravo gledamo u prošlost.

Brzina svjetlosti

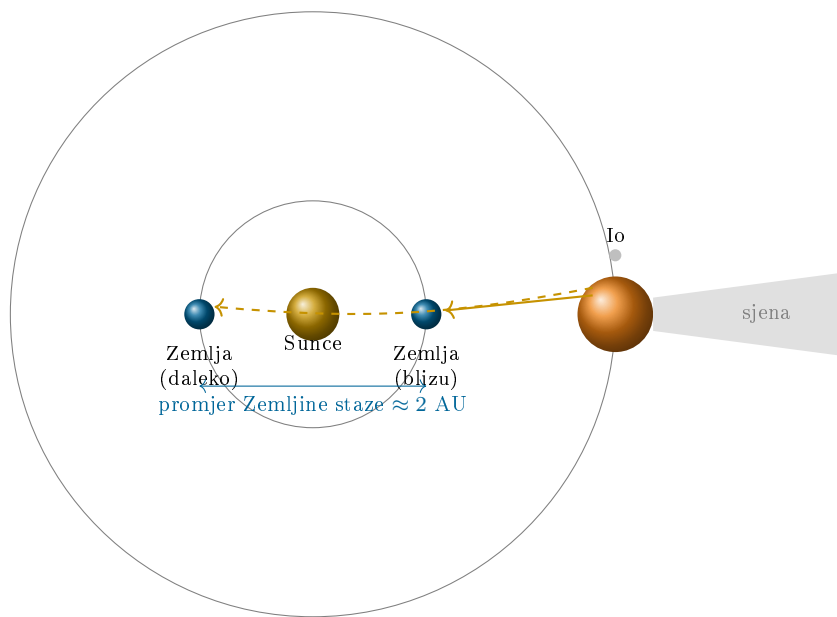
Brzina svjetlosti u vakuumu jest temeljna prirodna konstanta:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}$$

To je najveća moguća brzina prijenosa informacije u svemiru. Ista je za sve promatrače, neovisno o njihovom gibanju (temelj teorije relativnosti).

4.1 Olaf Römer i prvo mjerenje (1676.)

Prvi je konačnu brzinu svjetlosti izmjerio danski astronom **Olaf Römer** promatrajući Jupiterov mjesec **Io**. Io redovito ulazi u Jupiterovu sjenu (pomrčine), pa se iz njih može odrediti vrlo točan „nebeski sat”. Römer je primijetio da pomrčine kasne kad je Zemlja daleko od Jupitera, a ranije nastupaju kad je blizu. Objašnjenje: svjetlosti treba više vremena da prijeđe veću udaljenost.



Slika 4.1: Römerova metoda. Kad je Zemlja na suprotnoj strani od Jupitera (daleko), svjetlosti iz Iovih pomrčina treba dulje da stigne, pa pomrčine „kasne”. Iz kašnjenja i poznatog promjera Zemljine staze može se procijeniti brzina svjetlosti.

Gledati u svemir znači gledati u prošlost

Svjetlosti sa Sunca treba oko 8 minuta da stigne do nas — vidimo Sunce kakvo je bilo prije 8 minuta. Svjetlost najbliže zvijezde (Proxima Centauri) putuje 4,24 godine. Galaksiju u Andromedi vidimo kakva je bila prije ~ 2,5 milijuna godina. Što gledamo dalje, dublje gledamo u prošlost svemira.

4.2 Vrijeme putovanja svjetlosti

Budući da svjetlost prevažuje stalnu udaljenost u stalnom vremenu, vrijedi jednostavno

$$t = \frac{d}{c}.$$

Upravo se na tome temelji jedinica **svjetlosna godina** — udaljenost koju svjetlost prijeđe za godinu dana.

Primjer 4.1

Koliko svjetlosti treba da od Sunca stigne do Zemlje? Udaljenost je $d = 1 \text{ AU} = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$.

Rješenje:

$$t = \frac{d}{c} = \frac{1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}}{3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 499 \text{ s} \approx 8,3 \text{ min}.$$

Primjer 4.2

Koliko je daleko Mjesec ako svjetlosti (ili radijskom signalu) treba 1,28 s da stigne do njega?

Rješenje:

$$d = ct = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} \times 1,28 \text{ s} \approx 3,84 \cdot 10^8 \text{ m} = 384\,000 \text{ km}.$$

4.3 Svjetlost kao val: $c = \lambda\nu$

Svjetlost je elektromagnetski val. Brzina vala, valna duljina λ i frekvencija ν povezane su temeljnom relacijom koja vrijedi za sve elektromagnetsko zračenje:

Valna relacija

$$c = \lambda\nu$$

gdje je λ valna duljina (m), ν frekvencija ($\text{Hz} = 1/\text{s}$). Veća frekvencija znači kraću valnu duljinu. (Ovu ćemo relaciju detaljnije razraditi u poglavlju o elektromagnetskom zračenju.)

Primjer 4.3

Crvena svjetlost ima valnu duljinu $\lambda = 700 \text{ nm} = 7,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Kolika joj je frekvencija?

Rješenje:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{3,0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{7,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}} \approx 4,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Kolika je brzina svjetlosti u vakuumu (u m/s i zaokruženo u km/s)?
2. Tko je i kako prvi izmjerio konačnu brzinu svjetlosti? Što je promatrao?
3. Objasni tvrdnju „gledati u svemir znači gledati u prošlost”. Navedi primjer.
4. Proxima Centauri udaljena je 4,24 svjetlosne godine. Koliko je to metara? ($1 \text{ ly} = 9,461 \cdot 10^{15} \text{ m}$.)
5. Signalu s Marsa treba u prosjeku oko 12,5 min da stigne do Zemlje. Kolika je tada udal-

jenost Marsa od Zemlje (u km i u AU)?

6. Zelena svjetlost ima frekvenciju $\nu = 6,0 \cdot 10^{14}$ Hz. Kolika joj je valna duljina (u nm)?
7. (*Izazov*) Zvijezdu vidimo na nebu, a ona je udaljena 500 svjetlosnih godina. Astronom kaže: „možda ova zvijezda više i ne postoji”. Objasni što time misli i koliko je davno svjetlost koju večeras vidimo napustila zvijezdu.

Dio II

Županijska razina

Na županijskoj razini gradimo na temeljima školske i prelazimo na *fiziku* gibanja nebeskih tijela. Upoznajemo zakone koji upravljaju kretanjem planeta (Keplerove zakone i osnove nebeske mehanike) te prirodu svjetlosti i zračenja kojim nam svemir „govori” o sebi (elektromagnetsko zračenje).

5 | Planetarna gibanja

Kako se planeti gibaju oko Sunca? Stoljećima se mislilo da se kreću po savršenim kružnicama. Tek je **Johannes Kepler** početkom 17. stoljeća, analizirajući precizna mjerenja Tycha Brahea, otkrio tri zakona koji točno opisuju planetarna gibanja. Kasnije je Newton pokazao da svi proizlaze iz jednog jedinog — zakona gravitacije.

5.1 Osnove nebeske mehanike

Da bi se tijelo gibalo po zakrivljenoj putanji, na njega mora djelovati sila usmjerena prema središtu — **centripetalna sila**. Kod planeta tu ulogu ima gravitacijska privlačnost Sunca. Za tijelo mase m koje kruži brzinom v na udaljenosti r :

$$F_{\text{centr}} = \frac{m v^2}{r}.$$

Upravo ravnoteža gravitacije i potrebne centripetalne sile određuje brzinu kruženja, što ćemo iskoristiti kod kozmičkih brzina.

5.2 Keplerovi zakoni

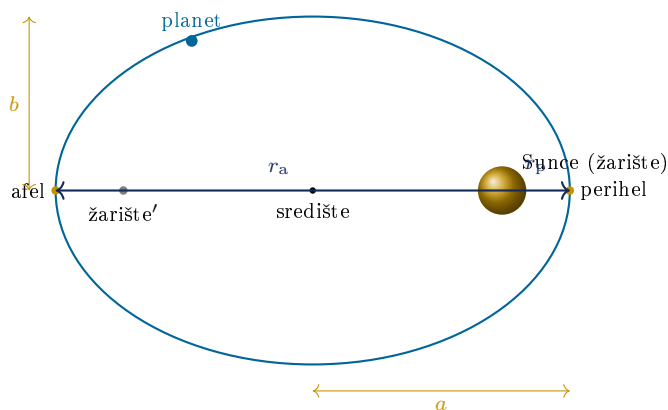
Prvi Keplerov zakon – zakon staza

Svaki se planet giba oko Sunca po **elipsi**, pri čemu se Sunce nalazi u jednom od **žarišta** (fokusa) te elipse.

Elipsa je opisana velikom poluosi a i **ekscentricitetom** e ($0 \leq e < 1$; za $e = 0$ elipsa je kružnica). Najbliža točka putanje Suncu zove se **perihel**, a najdalja **afel**:

Perihel i afel

$$\begin{aligned} r_p &= a(1 - e) & r_a &= a(1 + e) \\ r_p + r_a &= 2a & \Rightarrow & a = \frac{r_p + r_a}{2} \end{aligned}$$

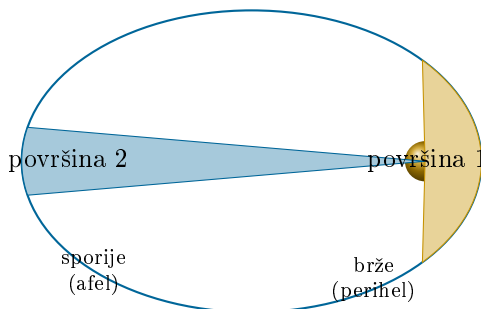


Slika 5.1: Prvi Keplerov zakon: planet se giba po elipsi sa Suncem u jednom žarištu. a je velika poluos, b mala poluos, r_p udaljenost u perihelu, r_a u afelu.

Drugi Keplerov zakon – zakon površina

Spojnica planeta i Sunca (radijus-vektor) prebriše **jednake površine u jednakim vremenima**. Posljedica: planet se giba **brže u perihelu** (kad je blizu Sunca), a **sporije u afelu**.

Drugi zakon zapravo je izraz očuvanja zakretne količine gibanja (kutnog momenta).



Slika 5.2: Drugi Keplerov zakon: u jednakom vremenu radijus-vektor prebriše jednaku površinu. Zato je planet brži blizu Sunca (perihel), a sporiji daleko (afel).

Treći Keplerov zakon – harmonijski zakon

Kvadrati ophodnih vremena planeta razmjerni su kubovima velikih poluosi njihovih staza:

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{konstanta (ista za sve planete oko istog Sunca)}$$

Ako T izrazimo u godinama, a a u astronomskim jedinicama, za Sunčev sustav konstanta je jednaka 1, pa zakon poprima vrlo praktičan oblik:

Treći Keplerov zakon – praktični oblik

$$T^2 = a^3 \quad (T \text{ u godinama, } a \text{ u AU})$$

Općeniti (Newtonov) oblik, koji vrijedi za bilo koje mase:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G(M+m)} a^3.$$

Primjer 5.1

Planet ima veliku poluos staze $a = 4$ AU. Koliko mu je ophodno vrijeme oko Sunca?

Rješenje: iz $T^2 = a^3$:

$$T^2 = 4^3 = 64 \Rightarrow T = \sqrt{64} = 8 \text{ godina.}$$

Primjer 5.2

Komet ima ophodno vrijeme $T = 27$ godina. Kolika mu je velika poluos?

Rješenje:

$$a^3 = T^2 = 27^2 = 729 \Rightarrow a = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ AU.}$$

Primjer 5.3

Halleyev komet ima perihel $r_p = 0,59$ AU i afel $r_a = 35,1$ AU. Izračunaj veliku poluos i ophodno vrijeme.

Rješenje:

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} = \frac{0,59 + 35,1}{2} \approx 17,8 \text{ AU.}$$

$$T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17,8^3} = \sqrt{5640} \approx 75 \text{ godina.}$$

(Stvarni period je oko 76 godina — vrlo dobro slaganje!)

5.3 Kozmičke brzine

Da bismo lansirali tijelo u orbitu ili ga otrgnuli od privlačnosti planeta, potrebne su određene granične brzine — **kozmičke brzine**.

Prva i druga kozmička brzina

Prva kozmička brzina v_1 jest najmanja brzina za kružnu orbitu tik iznad površine tijela (izjednačenje gravitacije i centripetalne sile):

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{gR}.$$

Druga kozmička brzina (brzina oslobađanja) v_2 jest najmanja brzina za potpuni bijeg iz gravitacijskog polja:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2} v_1.$$

Kozmičke brzine za Zemlju

$$v_1 \approx 7,9 \text{ km/s} \quad v_2 \approx 11,2 \text{ km/s} \quad v_3 \approx 16,7 \text{ km/s}$$

v_3 (treća kozmička) jest brzina potrebna da tijelo napusti Sunčev sustav, lansirano sa Zemlje.

Primjer 5.4

Izračunaj prvu kozmičku brzinu za Zemlju. Uzmi $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ i $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Rješenje:

$$v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{9,81 \times 6,37 \cdot 10^6} = \sqrt{6,25 \cdot 10^7} \approx 7906 \text{ m/s} \approx 7,9 \text{ km/s.}$$

A druga kozmička: $v_2 = \sqrt{2} v_1 \approx 1,41 \times 7,9 \approx 11,2 \text{ km/s.}$

Primjer 5.5

Kolika je druga kozmička brzina na Mjesecu? Masa Mjeseca $M = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, polumjer $R = 1,74 \cdot 10^6 \text{ m}$, $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$.

Rješenje:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6,674 \cdot 10^{-11} \times 7,35 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6}} \approx \sqrt{5,64 \cdot 10^6} \approx 2375 \text{ m/s} \approx 2,4 \text{ km/s.}$$

Zato je s Mjeseca puno lakše poletjeti nego sa Zemlje.

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Iskaži sva tri Keplerova zakona svojim riječima.
2. Planet ima veliku poluos $a = 9$ AU. Koliko mu je ophodno vrijeme?
3. Asteroid obiđe Sunce za $T = 8$ godina. Kolika mu je velika poluos staze?
4. Planet ima perihel $r_p = 2$ AU i afel $r_a = 6$ AU. Izračunaj veliku poluos a , ekscentricitet e i ophodno vrijeme T .
5. Zašto se planet giba brže u perihelu nego u afelu? Koji zakon to opisuje?
6. Što je prva, a što druga kozmička brzina? Kolika je veza među njima?
7. Izračunaj prvu kozmičku brzinu za planet kojem je $g = 3,7 \text{ m/s}^2$ (kao Mars) i $R = 3,39 \cdot 10^6 \text{ m}$.
8. (*Izazov*) Mars ima ophodno vrijeme $T = 1,88$ godina. Izračunaj veliku poluos njegove staze u AU, koristeći se trećim Keplerovim zakonom.

6 | Elektromagnetsko zračenje

Gotovo sve što znamo o svemiru saznali smo iz **elektromagnetskog zračenja** koje nam stiže od nebeskih tijela. Svjetlost koju vidimo tek je malen dio cijelog spektra. Analizirajući zračenje, astronomi određuju temperaturu, sastav, brzinu i udaljenost objekata.

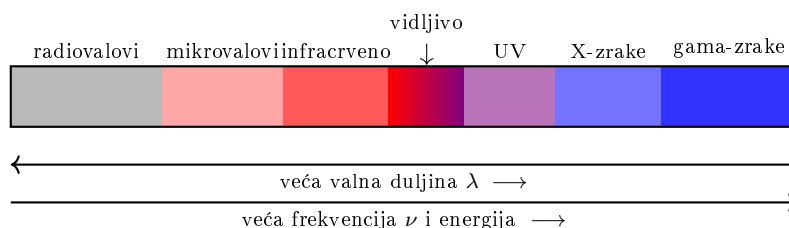
6.1 Elektromagnetski spektar

Elektromagnetsko zračenje je val električnog i magnetskog polja koji putuje brzinom svjetlosti. Razlikuje se samo po valnoj duljini λ (i frekvenciji ν). Cijeli raspon zovemo **elektromagnetski spektar**.

Valna relacija i energija fotona

$$c = \lambda \nu \qquad E = h \nu = \frac{h c}{\lambda}$$

gdje je $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$ (Planckova konstanta). Kraća valna duljina $\Rightarrow$ veća frekvencija $\Rightarrow$ veća energija fotona.



Slika 6.1: Elektromagnetski spektar. Vidljiva svjetlost (od crvene do ljubičaste) tek je uzak prozor između infracrvenoga i ultraljubičastoga. Prema desno valna duljina pada, a frekvencija i energija fotona rastu.

Primjer 6.1

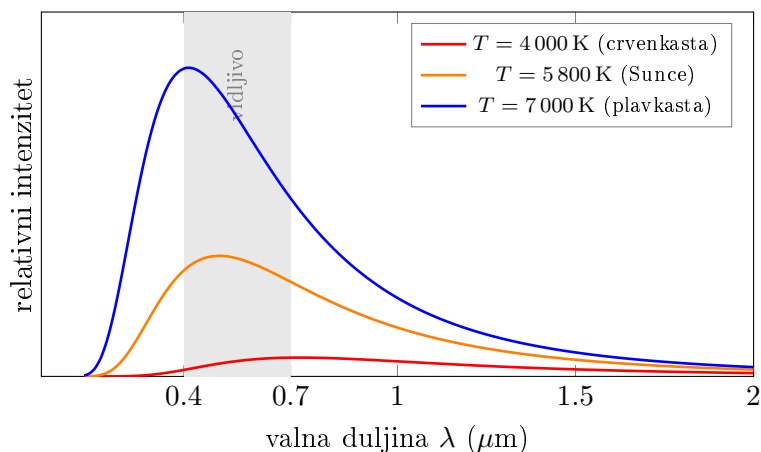
Kolika je energija fotona plave svjetlosti valne duljine $\lambda = 450 \text{ nm}$?

Rješenje:

$$E = \frac{h c}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \times 3,0 \cdot 10^8}{450 \cdot 10^{-9}} \approx 4,4 \cdot 10^{-19} \text{ J.}$$

6.2 Zračenje crnoga tijela

Svako zagrijano tijelo zrači elektromagnetske valove. Idealizirani zračitelj zove se **crno tijelo**, a njegov spektar ovisi *samo o temperaturi*. Zvijezde se ponašaju približno kao crna tijela, pa nam njihova boja otkriva temperaturu.



Slika 6.2: Spektar zračenja crnoga tijela za tri temperature. Što je tijelo toplije, vrh krivulje pomiče se prema kraćim valnim duljinama (plavo), a ukupno zračenje je jače. Zato su tople zvijezde plavkaste, a hladne crvenkaste.

6.2.1 Wienov zakon pomaka

Wienov zakon

Valna duljina na kojoj crno tijelo najjače zrači obrnuto je razmjerna temperaturi:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}.$$

Primjer 6.2

Sunčeva površina ima temperaturu $T \approx 5800 \text{ K}$. Na kojoj valnoj duljini Sunce najjače zrači?

Rješenje:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{5800} \approx 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}.$$

To je u zeleno-žutom dijelu vidljivog spektra — zato je Sunce žućkasto i zato je naše oko najosjetljivije baš na te boje.

6.2.2 Stefan–Boltzmannov zakon

Stefan–Boltzmannov zakon

Snaga koju crno tijelo izrači po jedinici površine razmjerna je *četvrtoj potenciji* temperature:

$$j = \sigma T^4, \quad \sigma = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W/(m}^2 \text{ K}^4\text{)}.$$

Ukupna snaga (sjaj, luminozitet) zvijezde polumjera R jest

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Primjer 6.3

Dvije zvijezde imaju jednak polumjer, ali jedna je dvostruko toplija od druge. Koliko je puta sjajnija?

Rješenje: kako je $L \propto T^4$ (uz isti R):

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

Toplija zvijezda zrači 16 puta jače.

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Poredaj po rastućoj valnoj duljini: X-zrake, radiovalovi, vidljiva svjetlost, infracrveno zračenje.
2. Koja vrsta zračenja ima veću energiju fotona: crvena svjetlost ili ultraljubičasto zračenje? Objasni.
3. Izračunaj energiju fotona valne duljine $\lambda = 600 \text{ nm}$.
4. Zvijezda ima temperaturu $T = 10\,000 \text{ K}$. Na kojoj valnoj duljini najjače zrači? U kojem je to dijelu spektra?
5. Kojom bojom približno svijetli zvijezda čiji je λ_{max} u crvenom dijelu spektra — je li ona topla ili hladna?
6. Zvijezda je 3 puta toplija od Sunca, ali jednakog polumjera. Koliko je puta sjajnija (luminozitetnija)?
7. Dvije zvijezde imaju istu temperaturu, ali jedna ima 2 puta veći polumjer. Koliko je puta sjajnija?
8. (Izazov) Zvijezda ima temperaturu $T = 7\,250 \text{ K}$. (a) Izračunaj λ_{max} . (b) Ako joj je polumjer jednak Sunčevu ($R_{\odot}$), za koliko je puta luminozitetnija od Sunca ($T_{\odot} = 5\,800 \text{ K}$)?

Dio III

Državna razina

Na državnoj razini sve dosadašnje spoznaje povezujemo u jedinstvenu cjelinu. U središtu je **Newtonov opći zakon gravitacije** — jedan zakon iz kojega slijede svi Keplerovi zakoni, energija i brzine na stazi te potpuni opis svake staze pomoću njezinih *elemenata*.

7 | Elementi staza i opći zakon gravitacije

7.1 Newtonov opći zakon gravitacije

Isaac Newton pokazao je da se sva tijela u svemiru privlače istom silom — od jabuke koja pada do planeta koji kruži. Ta je spoznaja ujedinila „nebesku” i „zemaljsku” fiziku.

Opći zakon gravitacije

Dva tijela masa m_1 i m_2 , čija su središta udaljena r , privlače se silom

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

gdje je $G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$ **gravitacijska konstanta**. Sila je usmjerena duž spojnice tijela, a opada s kvadratom udaljenosti.

Primjer 7.1

Kolikom se silom privlače Zemlja ($M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) i Mjesec ($m = 7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$) na udaljenosti $r = 3,84 \cdot 10^8 \text{ m}$?

Rješenje:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,97 \cdot 10^{24} \times 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} \approx 1,99 \cdot 10^{20} \text{ N}.$$

7.1.1 Iz gravitacije slijedi treći Keplerov zakon

Za planet mase m na (približno) kružnoj stazi polumjera r oko Sunca mase M , gravitacijska sila daje centripetalnu silu:

$$G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

Uz $v = \frac{2\pi r}{T}$ (obilazak opsega za period T) slijedi nakon sređivanja

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

što je upravo treći Keplerov zakon — sada *izveden* iz gravitacije, s jasno određenom konstantom. (Za eliptične staze r se zamjenjuje velikom poluosi a , a M sa $M + m$.)

7.2 Energija na stazi

Gravitacijska potencijalna energija dvaju tijela (uz dogovor da je $E_p = 0$ na beskonačnoj udaljenosti) jest *negativna*:

$$E_p = - \frac{GMm}{r}.$$

Ukupna mehanička energija tijela na eliptičnoj stazi velike poluosi a iznosi

Energija i vis-viva

$$E = E_k + E_p = -\frac{GMm}{2a}$$

Iz toga slijedi **vis-viva** jednadžba za brzinu u bilo kojoj točki staze:

$$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Negativna ukupna energija znači da je tijelo *vezano* (kruži). Ako je $E = 0$, staza je parabola (granica bijega); ako je $E > 0$, staza je hiperbola (tijelo zauvijek odlazi).

Primjer 7.2

Satelit kruži oko Zemlje po kružnici ($r = a$) polumjera $r = 7,0 \cdot 10^6$ m. Kolika mu je brzina? ($GM_\oplus = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.)

Rješenje: za kružnicu $a = r$, pa vis-viva daje $v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r} \right) = \frac{GM}{r}$:

$$v = \sqrt{\frac{3,986 \cdot 10^{14}}{7,0 \cdot 10^6}} = \sqrt{5,69 \cdot 10^7} \approx 7550 \text{ m/s} \approx 7,5 \text{ km/s}.$$

Primjer 7.3

Komet u perihelu (r_p) ima veću brzinu nego u afelu (r_a). Za stazu s $a = 4$ AU i $r_p = 2$ AU usporedi brzine u perihelu i afelu.

Rješenje: $r_a = 2a - r_p = 8 - 2 = 6$ AU. Iz vis-vive (uz isti GM i a) omjer kvadrata brzina je

$$\frac{v_p^2}{v_a^2} = \frac{2/r_p - 1/a}{2/r_a - 1/a} = \frac{2/2 - 1/4}{2/6 - 1/4} = \frac{0,75}{0,0833} = 9 \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = 3.$$

U perihelu je komet 3 puta brži nego u afelu — u skladu s drugim Keplerovim zakonom.

7.3 Elementi staze

Da bismo potpuno opisali stazu nekog tijela u prostoru — i njegov položaj na njoj — potrebno je **šest brojeva**, takozvanih *Keplerovih elemenata staze*. Dva određuju *veličinu i oblik* staze, tri njezinu *orijentaciju* u prostoru, a jedan *položaj* tijela na stazi.

Šest elemenata staze**Veličina i oblik:**

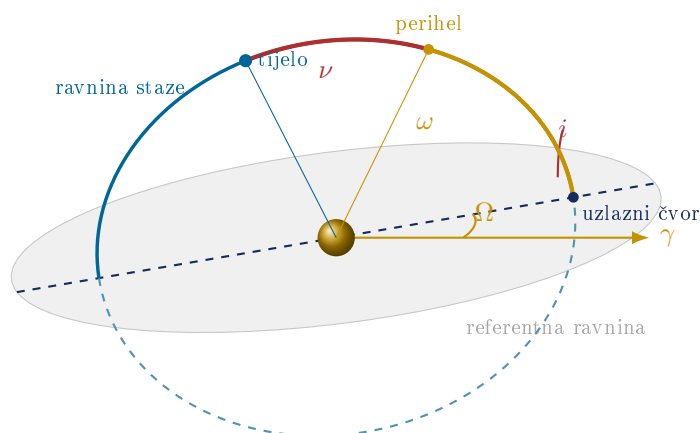
- velika poluos a — veličina staze,
- ekscentricitet e — oblik (izduženost) staze.

Orijentacija u prostoru:

- nagib (inklinacija) i — kut ravnine staze prema referentnoj ravnini,
- duljina uzlaznog čvora Ω — zakret linije čvorova u referentnoj ravnini,
- argument perihela ω — zakret perihela u ravnini staze.

Položaj tijela:

- prava anomalija ν (ili vrijeme prolaza kroz perihel T) — gdje je tijelo *sada*.



Slika 7.1: Elementi staze. Velika poluos a i ekscentricitet e određuju veličinu i oblik staze (usp. poglavlje o Keplerovim zakonima). Orijentaciju u prostoru daju: nagib (inklinacija) i između ravnine staze i referentne ravnine, duljina uzlaznog čvora Ω (kut od smjera γ do uzlaznog čvora) i argument perihela ω (kut od uzlaznog čvora do perihela). Trenutni položaj tijela na stazi daje prava anomalija ν .

Zašto baš šest?

Gibanje tijela u prostoru u svakom je trenutku određeno njegovim položajem (3 broja) i brzinom (3 broja) — ukupno šest. Elementi staze samo su drukčiji, ali ekvivalentan, način da se tih šest podataka zapiše — prikladniji jer je pet elemenata stalno (staza se ne mijenja), a mijenja se samo jedan (ν , položaj na stazi).

Primjer 7.4

Staza ima ekscentricitet $e = 0,5$ i veliku poluos $a = 10$ AU. Izračunaj udaljenosti u perihelu i afelu.

Rješenje:

$$r_p = a(1 - e) = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ AU}, \quad r_a = a(1 + e) = 10 \cdot 1,5 = 15 \text{ AU}.$$

Pitanja i zadaci za ponavljanje

1. Napiši Newtonov opći zakon gravitacije i objasni značenje svake veličine. Kako se sila mijenja ako se udaljenost udvostruči?
2. Dva tijela mase 1000 kg udaljena su 2 m. Kolikom se silom privlače? ($G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$.)
3. Pokaži (skicom izvoda) kako iz izjednačavanja gravitacijske i centripetalne sile slijedi treći Keplerov zakon $T^2 \propto a^3$.
4. Zašto je gravitacijska potencijalna energija negativna? Što znači $E < 0$, a što $E > 0$ za stazu tijela?
5. Satelit kruži oko Zemlje po kružnici polumjera $r = 8,0 \cdot 10^6 \text{ m}$. Kolika mu je brzina? ($GM_{\oplus} = 3,986 \cdot 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$.)
6. Nabroji svih šest elemenata staze i razvrstaj ih u tri skupine (veličina/oblik, orijentacija,

položaj).

7. Staza ima $a = 6$ AU i $e = 0,2$. Izračunaj r_p i r_a .
8. (*Izazov*) Komet ima veliku poluos $a = 5$ AU i u perihelu je udaljen $r_p = 1$ AU od Sunca. Izračunaj (a) ekscentricitet, (b) udaljenost u afelu, (c) omjer brzina u perihelu i afelu.

Rješenja zadataka

U nastavku su rješenja svih zadataka za ponavljanje, poredana po poglavljima. Računske zadatke pokušaj najprije riješiti sam, a rješenje iskoristi za provjeru i razumijevanje postupka.

Poglavlje 1 — Astrognozija

1. Uvjet cirkumpolarnosti: $\delta \geq 90^\circ - \varphi$. Za Hrvatsku ($\varphi \approx 45^\circ$) treba $\delta \gtrsim 45^\circ$; cirkumpolarna su npr. Mali medvjed, Veliki medvjed, Kasiopeja, Cefej i Zmaj.
2. Visina nebeskog pola jednaka je zemljopisnoj širini: $h_{\text{pol}} = \varphi = 45,8^\circ$.
3. Zbog revolucije Zemlje oko Sunca noćna strana Zemlje tijekom godine „gleda” u različite dijelove svemira. Sunce se prividno pomiče kroz zodijak, pa su zvijezda iza Sunca nevidljiva, a vidimo ona na suprotnoj strani — zato se sezonska zvijezda izmjenjuju.
4. Vega, Deneb i Altair čine **Ljetni trokut**. Betelgez, Sirius i Procion čine **Zimski trokut**.
5. Venera je unutarnji planet pa joj je najveća elongacija samo oko 47° — uvijek je blizu Sunca na nebu i vidljiva tek nakon zalaska (Večernjača) ili prije izlaska Sunca (Zornjača), nikad visoko oko ponoći. *Elongacija* je kut između Sunca i planeta gledano sa Zemlje.
6. U opoziciji Mars izlazi otprilike u vrijeme zalaska Sunca, vidljiv je cijelu noć i kulminira oko ponoći. Najsajniji je jer je tada najbliže Zemlji i u potpunosti obasjan (Zemlja je između Sunca i Marsa).
7. Granično cirkumpolarna znači $\delta = 90^\circ - \varphi$, odakle $\varphi = 90^\circ - \delta = 90^\circ - 60^\circ = \boxed{30^\circ}$.
8. Zvijezda izlazi samo ako je $\delta > -(90^\circ - \varphi) = -44,2^\circ$. Kako je $\delta = -70^\circ < -44,2^\circ$, zvijezda se **nikada ne vidi** iz Zagreba. Provjera gornjom kulminacijom: $h_{\text{max}} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - 115,8^\circ = -25,8^\circ < 0$ — uvijek je ispod obzora.

Poglavlje 2 — Mjerenje udaljenosti

1. Svjetlosna godina je udaljenost koju svjetlost prijeđe za godinu dana; parsek je udaljenost s koje 1 AU vidimo pod kutom od $1''$. Parsek je **veći**: 1 pc = 3,26 ly (oko 3,26 puta).
2. $d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,025} = 40$ pc. U svjetlosnim godinama: $40 \times 3,26 \approx 130$ ly.
3. $p = \frac{1}{d} = \frac{1}{5} = 0,2''$.
4. $m_1 - m_2 = -2,5 \log 100 = -2,5 \times 2 = -5$, dakle razlika je 5 magnituda.
5. Manja magnituda znači veći sjaj, pa je sjajnija zvijezda A. Razlika je $6,0 - 1,0 = 5$ mag, što odgovara faktoru 100: zvijezda A je 100 puta sjajnija.
6. $M = m - 5 \log d + 5 = 10 - 5 \log 1000 + 5 = 10 - 15 + 5 = \boxed{0}$.
7. Najprije $d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,05} = 20$ pc. Zatim $M = m - 5 \log d + 5 = 9 - 5 \log 20 + 5 = 14 - 6,5 \approx \boxed{7,5}$.

Poglavlje 3 — Gibanje Zemlje i pojave na nebeskoj sferi

1. Horizontski sustav (A, h) vezan je uz promatrača i mijenja se s vremenom i mjestom; ekvatorski (α, δ) vezan je uz nebesku sferu i (gotovo) je stalan. Zbog te stalnosti rabi se za zvjezdane kataloge.
2. U zenitu je $h = 90^\circ$ (azimut je neodređen). Na obzoru je $z = 90^\circ - h = 90^\circ - 0^\circ = 90^\circ$.

3. $h_{\text{pol}} = \varphi = 45^\circ$.
4. $h_{\text{max}} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - |43,5^\circ - 35^\circ| = 90^\circ - 8,5^\circ = \boxed{81,5^\circ}$.
5. Godišnja doba nastaju zbog nagiba Zemljine osi ($\approx 23,5^\circ$): kad je polutka nagnuta prema Suncu, zrake padaju strmije i dan je dulji (ljetno). Najčešća zabluda: da je ljeti Zemlja bliže Suncu — zapravo je perihel u siječnju (zima na sjevernoj polutki).
6. $1^{\text{h}} = 15^\circ$. $1^{\text{m}} = \frac{15^\circ}{60} = 0,25^\circ = 15'$ (lučnih minuta).
7. Dok se Zemlja okrene za 360° (zvjezdani dan), istodobno se pomakne po stazi za otprilike 1° , pa se mora okrenuti još $\sim 1^\circ$ (oko 4 minute) da bi Sunce opet došlo na meridijan. Zato je sunčev dan dulji, a zvjezdani kraći.
8. $h_{\text{max}} = 90^\circ - |\varphi - \delta| = 90^\circ - |45,55^\circ - 0^\circ| = \boxed{44,45^\circ}$. U ravnodnevici Sunce izlazi točno na istoku i zalazi na zapadu, pa dan traje približno 12 sati.

Poglavlje 4 — Brzina svjetlosti

1. $c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 300\,000 \text{ km/s}$.
2. Danac **Olaf Römer** (1676.); promatrao je pomrčine Jupiterova mjeseca **Ija** i primijetio da kasne kad je Zemlja dalje od Jupitera.
3. Jer svjetlost putuje konačnom brzinom, do nas stiže svjetlost koja je objekt napustila u prošlosti — vidimo objekt kakav je *bio*, a ne kakav je sada. Npr. Sunce vidimo kakvo je bilo prije ≈ 8 minuta.
4. $d = 4,24 \times 9,461 \cdot 10^{15} \approx 4,0 \cdot 10^{16} \text{ m}$.
5. $t = 12,5 \text{ min} = 750 \text{ s}$, pa $d = ct = 3,0 \cdot 10^8 \times 750 = 2,25 \cdot 10^{11} \text{ m} = 2,25 \cdot 10^8 \text{ km}$. U AU: $\frac{2,25 \cdot 10^{11}}{1,496 \cdot 10^{11}} \approx 1,5 \text{ AU}$.
6. $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3,0 \cdot 10^8}{6,0 \cdot 10^{14}} = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 500 \text{ nm}$.
7. Svjetlost koju večeras vidimo napustila je zvijezdu prije 500 godina; o njezinu današnjem stanju ništa ne znamo. Ako je zvijezda u međuvremenu nestala (npr. eksplodirala), to ćemo vidjeti tek za onoliko godina koliko je svjetlosti preostalo da nas obavijesti — dakle „možda više i ne postoji“, a mi to još ne znamo.

Poglavlje 5 — Planetarna gibanja

1. *Prvi*: planeti se gibaju po elipsama sa Suncem u jednom žarištu. *Drugi*: spojnica planeta i Sunca prebriše jednake površine u jednakim vremenima (planet je brži u perihelu). *Treći*: T^2/a^3 jednak je za sve planete oko istog Sunca.
2. $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = \boxed{27 \text{ godina}}$.
3. $a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = \boxed{4 \text{ AU}}$.
4. $a = \frac{r_{\text{p}} + r_{\text{a}}}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4 \text{ AU}$; $e = \frac{r_{\text{a}} - r_{\text{p}}}{r_{\text{a}} + r_{\text{p}}} = \frac{4}{8} = 0,5$; $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{64} = 8 \text{ godina}$.
5. Zbog drugog Keplerovog zakona (zakona površina), koji je posljedica očuvanja zakretne količine gibanja: bliže Suncu spojnica je kraća, pa planet mora biti brži da prebriše jednaku površinu.

6. Prva kozmička brzina ($v_1 = \sqrt{gR}$) najmanja je brzina za kružnu orbitu tik iznad površine; druga ($v_2 = \sqrt{2} v_1$) je brzina oslobađanja (bijeg iz gravitacijskog polja). Veza: $v_2 = \sqrt{2} v_1 \approx 1,41 v_1$.
7. $v_1 = \sqrt{gR} = \sqrt{3,7 \times 3,39 \cdot 10^6} = \sqrt{1,254 \cdot 10^7} \approx 3\,541 \text{ m/s} \approx 3,5 \text{ km/s}$.
8. $a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{1,88^2} = \sqrt[3]{3,53} \approx \boxed{1,52 \text{ AU}}$.

Poglavlje 6 — Elektromagnetsko zračenje

1. Po rastućoj valnoj duljini: X-zrake < vidljiva svjetlost < infracrveno < radiovalovi.
2. Veću energiju ima **ultraljubičasto** zračenje. Energija fotona je $E = \frac{hc}{\lambda}$, pa kraća valna duljina (UV) znači veću energiju nego crvena svjetlost.
3. $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \times 3,0 \cdot 10^8}{600 \cdot 10^{-9}} \approx 3,3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.
4. $\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{10\,000} = 2,9 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 290 \text{ nm}$ — to je u **ultraljubičastom** dijelu spektra.
5. Zvijezda kojoj je $\lambda_{\max}$ u crvenom dijelu je **hladna** (niska temperatura) — prema Wienovu zakonu, niža temperatura daje dulju $\lambda_{\max}$.
6. $\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4 = 3^4 = \boxed{81}$ puta sjajnija (uz isti polumjer).
7. $\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 2^2 = \boxed{4}$ puta sjajnija (uz istu temperaturu).
8. (a) $\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{7250} \approx 4,0 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 400 \text{ nm}$ (ljubičasto/plavo). (b) $\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{7250}{5800}\right)^4 = 1,25^4 \approx \boxed{2,4}$ puta luminozitetnija.

Poglavlje 7 — Elementi staza i opći zakon gravitacije

1. $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$: m_1, m_2 mase tijela, r udaljenost središta, G gravitacijska konstanta. Ako se r udvostruči, sila postaje 4 puta manja (jer ovisi o $1/r^2$).
2. $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000 \times 1000}{2^2} = \frac{6,674 \cdot 10^{-5}}{4} \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ N}$.
3. Izjednačimo gravitacijsku i centripetalnu silu: $G \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$. Uz $v = \frac{2\pi r}{T}$ slijedi $G \frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$, odakle $T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$, dakle $T^2 \propto r^3$.
4. Dogovorom je $E_p = 0$ na beskonačnoj udaljenosti; kako je sila privlačna, pri približavanju energija pada ispod nule, pa je $E_p < 0$. Ukupna energija: $E < 0$ znači vezanu stazu (elipsa/kružnica), $E = 0$ parabolu (granica bijega), $E > 0$ hiperbolu (tijelo zauvijek odlazi).
5. Za kružnicu $a = r$: $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{3,986 \cdot 10^{14}}{8,0 \cdot 10^6}} = \sqrt{4,98 \cdot 10^7} \approx 7\,059 \text{ m/s} \approx 7,1 \text{ km/s}$.
6. *Veličina/oblik*: velika poluos a , ekscentricitet e . *Orijentacija*: nagib i , duljina uzlaznog čvora Ω , argument perihela ω . *Položaj*: prava anomalija ν (ili vrijeme prolaza kroz perihel T).

7. $r_p = a(1 - e) = 6 \times 0,8 = 4,8 \text{ AU}$; $r_a = a(1 + e) = 6 \times 1,2 = 7,2 \text{ AU}$.

8. (a) Iz $r_p = a(1 - e)$: $1 = 5(1 - e) \Rightarrow 1 - e = 0,2 \Rightarrow e = 0,8$. (b) $r_a = a(1 + e) = 5 \times 1,8 = 9 \text{ AU}$. (c) U perihelu i afelu brzina je okomita na radijus, pa očuvanje zakretne količine daje $r_p v_p = r_a v_a$, odakle $\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{9}{1} = \boxed{9}$.