

Priprema za natjecanje iz astronomije za učenike srednjih škola

Zbirka zadataka iz astronomije

400 zadataka s rješenjima · šesnaest tema



dr. sc. Sandi Baressi Šegota

Astronomsko društvo „Istra“ Pula

Kako se zbirka koristi

Zbirka prati šesnaest predavanja istoimenog ciklusa. Svaka je tema samostalna cjelina koja počinje **pregledom jednadžbi** s objašnjenjem svih simbola, a zatim slijedi dvadeset pet zadataka. Rješenja svih zadataka nalaze se u drugom dijelu knjige, a na kraju je **tablica konstanti** koju treba imati pri ruci tijekom rada.

Svaki je zadatak označen razinom:

- Š** školska razina — izravna primjena jedne formule ili pojma
- Ž** županijska razina — višekoračni račun, spajanje dvaju pojmova
- D** državna razina — izvod, procjena ili nestandardan pristup

Tri savjeta koja vrijede za sve zadatke.

1. Prije računanja **procijenite red veličine**. Ako se kalkulator razlikuje za više od faktora deset, pogreška je gotovo sigurno u jedinicama.
2. Radite u **natjecateljskim jedinicama** kad god možete: a u astronomskim jedinicama, T u godinama, mase u Sunčevim masama. Tada u trećem Keplerovom zakonu nema nijedne konstante.
3. Rezultat navedite na **onoliko znamenki koliko ih podatci opravdavaju**. Pet znamenki iz podatka s dvije nije preciznost nego nemar.

Rješenja su pisana tako da se vidi *postupak*, a ne samo broj. Ako vam se rezultat razlikuje u zadnjoj znamenki, uzrok je najčešće zaokruživanje međurezultata — to nije pogreška.

Sadržaj

Kako se zbirka koristi	1
I. Zadatci	3
1 Nebeska sfera i astrognozija	4
2 Koordinatni sustavi, gibanje Zemlje i vrijeme	6
3 Udaljenosti i zvjezdane veličine	8
4 Nebeska mehanika	10
5 Elektromagnetsko zračenje i zračenje crnog tijela	12
6 Teleskopi i opažački instrumenti	14
7 Sunčev sustav: planeti	16
8 Sunčev sustav: mala tijela	18
9 Sunce i izvori zvjezdane energije	20
10 Fotometrija, spektroskopija i HR-dijagram	22
11 Dvojne i promjenjive zvijezde, evolucija	24
12 Skupovi, galaksije i kozmologija	26
13 Sferna astronomija i računske tehnike	28
14 Egzoplaneti i astrobiologija	30
15 Relativistička i visokoenergetska astrofizika	33
16 Praktikum: opažanje, mjerenje i obrada podataka	35
II. Rješenja	37
Tablica konstanti	63

I. Zadatci

1. Nebeska sfera i astrognozija

O ovoj temi

Sve počinje od pretpostavke koja je fizikalno pogrešna, a praktično neprocjenjiva: da su sve zvijezde na jednakoj udaljenosti, pričvršćene na unutarnju stranu goleme kugle. Ta **nebeska sfera** nema polumjer i ne treba ga imati — na njoj se mjere isključivo **kutovi**. Udaljenost dviju zvijezda nije nekoliko svjetlosnih godina nego nekoliko stupnjeva, a veličina zvijezda mjeri se šakom ispružene ruke.

Na toj kugli živi mreža koordinata koja se okreće zajedno s njom. Nebeski polovi leže iznad Zemljinih, nebeski ekvator dijeli sferu napola, a visina pola nad horizontom otkriva geografsku širinu promatrača — otud jedna od najstarijih navigacijskih tehnika uopće. Iz tog jednog podatka slijedi sve ostalo: koje su zvijezde cirkumpolarne, koje nikada ne izlaze, koliko se visoko penju u kulminaciji i pod kojim azimutom prelaze horizont.

Zadatci u ovom poglavlju gotovo su svi *geometrijski*, a ne fizikalni. Traže prostornu predodžbu i sigurno baratanje s trima brojevima — φ , δ i h — te s pravilom da se nebo okreće 15° na sat i da svaka zvijezda svakog dana kulminira gotovo četiri minute ranije. Tko to usvoji, riješit će polovicu zadataka bez kalkulatora.

Vrijedi uložiti i nešto vremena u samo prepoznavanje neba, jer se dobar dio natjecateljskih zadataka svodi na pitanje gdje se što nalazi. Zviježda nisu fizikalne cjeline nego dogovorena područja sfere, njih osamdeset osam, a zvijezde unutar njih nose grčka slova redom po sjaju — otud α Lyrae za Vegu i β Persei za Algol. Nekoliko sigurnih orijentira, poput Velikih kola koja pokazuju na Polaru ili Orionova pojasa koji vodi do Siriusa, dovoljno je da se ostatak neba brzo posloži.

Što poglavlje pokriva

- položaj nebeskih polova i ovisnost o geografskoj širini
- cirkumpolarne zvijezde i one koje nikada ne izlaze
- visina u gornjoj i donjoj kulminaciji
- kutne udaljenosti i procjene veličina na nebu
- prividno dnevno i godišnje gibanje neba

Pregled jednadžbi

$h_P = \varphi$	visina nebeskog pola jednaka je geografskoj širini
$h_{\max} = 90^\circ - \varphi - \delta $	visina u gornjoj kulminaciji
$h_{\min} = \varphi + \delta - 90^\circ$	visina u donjoj kulminaciji
$\delta > 90^\circ - \varphi$	uvjet cirkumpolarnosti (sjeverna polutka)
$\delta < -(90^\circ - \varphi)$	uvjet da objekt nikada ne izlazi
$\cos d = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos \Delta\alpha$	kutna udaljenost

φ geografska širina promatrača

δ deklinacija objekta

α rektascenzija objekta

h visina iznad horizonta

d kutna udaljenost dvaju objekata na nebeskoj sferi

Zvjezdani dan traje $23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}}$, pa zvijezda svakog dana kulminira $3^{\text{m}}56^{\text{s}}$ ranije. Nebeska sfera prividno se okreće za 15° na sat. Kutni promjeri Sunca i Mjeseca iznose oko $0,5^\circ$.

Najčešće pogreške. Zaboravljanje da kulminacija može biti i *sjeverno* od zenita, kad je $\delta > \varphi$; miješanje kutne udaljenosti s razlikom rektascenzija (razlika se skraćuje faktorom $\cos \delta$); i primjena formule $h = 90^\circ - \varphi + \delta$ ondje gdje treba $h = 90^\circ + \varphi - \delta$.

- 1.1. **Š** Koja je granična deklinacija za cirkumpolarnost u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$)?
- 1.2. **Š** Kolika je visina Vege ($\delta = +38,78^\circ$) u gornjoj kulminaciji u Splitu ($\varphi = 43,5^\circ$)?
- 1.3. **Š** Je li Aldebaran ($\delta = +16,5^\circ$) cirkumpolarnan u Osijeku ($\varphi = 45,6^\circ$)? Obrazložite.
- 1.4. **Š** Koliko je visoko Polara iznad horizonta u Dubrovniku ($\varphi = 42,65^\circ$)?
- 1.5. **Š** Zvijezda u donjoj kulminaciji ima visinu 5° , a promatrač je na $\varphi = 45^\circ$. Kolika joj je deklinacija?
- 1.6. **Š** Koliko stupnjeva prijeđe zvijezda po nebeskoj sferi u tri sata?
- 1.7. **Š** Koliko puta kutni promjer Mjeseca stane duž Orionova pojasa, koji je dugačak približno 3° ?
- 1.8. **Š** Zvijezda ima deklinaciju $\delta = -30^\circ$. Izlazi li ona u Puli ($\varphi = 44,87^\circ$)? A u Helsinkiju ($\varphi = 60,2^\circ$)?
- 1.9. **Š** Koliko šaka ispružene ruke (svaka oko 10°) stane od horizonta do zenita?
- 1.10. **Š** Objasnite zašto zvijezde Orion nikada ne može biti cirkumpolarno ni na jednoj geografskoj širini sjeverne polutke naseljenoj ljudima.
- 1.11. **Ž** Na kojoj geografskoj širini Vega ($\delta = +38,78^\circ$) prolazi kroz zenit?
- 1.12. **Ž** Od koje geografske širine Canopus ($\delta = -52,7^\circ$) postaje cirkumpolarnan?
- 1.13. **Ž** Zvijezda kulminira u 23^h00^m prvog rujna. U koje će vrijeme kulminirati prvog listopada?
- 1.14. **Ž** Dvije zvijezde imaju istu deklinaciju $\delta = +50^\circ$, a razlika im rektascenzija iznosi 1^h . Kolika im je kutna udaljenost?
- 1.15. **Ž** Zvijezda izlazi točno na sjeveroistoku, dakle pri azimutu 45° mjerenom od sjevera. Promatrač je na $\varphi = 45^\circ$. Kolika je deklinacija zvijezde? Uputa: $\cos A_0 = \sin \delta / \cos \varphi$.
- 1.16. **Ž** Koliko sati Sirius ($\delta = -16,72^\circ$) provede iznad horizonta u Puli ($\varphi = 44,87^\circ$)? Refrakciju zanemarite.
- 1.17. **Ž** Koliki dio cijele nebeske sfere iz Pule ($\varphi = 44,87^\circ$) nikada nije vidljiv? Izrazite ga u postocima.
- 1.18. **Ž** Zvijezda ima $\alpha = 6^h$. U kojem mjesecu ona kulminira oko ponoći?
- 1.19. **Ž** Promatrač putuje od Pule ($\varphi = 44,87^\circ$) do Trsta ($\varphi = 45,65^\circ$). Za koliko se promijeni visina Polare?
- 1.20. **Ž** Zvijezda ima deklinaciju $\delta = +60^\circ$, a promatrač je na $\varphi = 45^\circ$. Kolika joj je visina u donjoj kulminaciji i je li ona cirkumpolarna?
- 1.21. **D** Izračunajte kutnu udaljenost između Betelgeuse ($\alpha = 5^h55,2^m$, $\delta = +7,41^\circ$) i Rigela ($\alpha = 5^h14,5^m$, $\delta = -8,20^\circ$).
- 1.22. **D** Odredite satni kut pri kojem zvijezda deklinacije $\delta = +20^\circ$ ima visinu 30° , gledano s $\varphi = 45^\circ$.
- 1.23. **D** Polara ima $\delta = 89,264^\circ$. Odredite joj visinu i azimut pri satnom kutu $H = 6^h$, za $\varphi = 44,87^\circ$. Što iz rezultata slijedi o upotrebljivosti Polare za orijentaciju?
- 1.24. **D** Koliko dugo traje prolazak Sunca kroz meridijan, mjereno od trenutka kad ga prvi rub dotakne do trenutka kad ga zadnji napusti? Uzmite $\delta_\odot = 0$ i kutni promjer $0,53^\circ$.
- 1.25. **D** Promatrač se pomakne 100 km prema sjeveru. Za koliko se promijeni visina u kulminaciji zvijezde koja kulminira južno od zenita? Uzmite da 1° meridijana odgovara 111,2 km.

2. Koordinatni sustavi, gibanje Zemlje i vrijeme

O ovoj temi

Nebeska sfera je nepomična tek u prvoj aproksimaciji. Zemlja se vrti, obilazi Sunce i pritom joj os polako opisuje stožac, pa svaki koordinatni sustav ima svoje područje u kojem je koristan. **Horizontski** sustav (h , A) vezan je uz promatrača i mijenja se iz minute u minutu. **Ekvatorski** (α , δ) vezan je uz nebo i za zvijezde je gotovo stalan — zato se u katalozima koristi upravo on.

Most između tih dvaju svjetova je **vrijeme**. Satni kut kazuje koliko je prošlo od kulminacije, zvjezdano vrijeme jednako je rektascenziji objekta koji upravo kulminira, a razlika sunčeva i zvjezdanog dana od 3^m56^s posljedica je toga što Zemlja u danu prijeđe otprilike jedan stupanj svoje staze oko Sunca. Iz istog izvora dolaze i jednadžba vremena, i razlika mjesnog i pojasnog vremena, i to što sunčani sat i zidni sat rijetko pokazuju isto.

Poglavlje traži disciplinu u jedinicama. Rektascenzija se izražava u satima, satni kut također, a deklinacija i visina u stupnjevima — pretvorba $1^h = 15^\circ$ mora ići automatski. Julijanski datum uveden je upravo zato da se izbjegne računanje s kalendarom: on je samo neprekidan broj dana, ali počinje u podne, pa ponoć uvijek pada na polovicu.

Poseban dio poglavlja čine zadatci o izlasku i zalasku. Oni se svi svode na jednu jednadžbu — onu za satni kut pri zadanoj visini — ali njezine posljedice nisu očite.

Što poglavlje pokriva

- pretvorbe između horizontskih i ekvatorskih koordinata
- satni kut, zvjezdano vrijeme i kulminacije
- pravo, srednje i pojasno sunčevo vrijeme
- trajanje dana i položaj izlaska Sunca
- julijanski datum i računanje s efemeridama

Pregled jednadžbi

$z = 90^\circ - h$	zenitna daljina
$\theta = H + \alpha$	zvjezdano vrijeme; kulminacija je $H = 0$
$\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$	visina objekta
$\cos H_0 = \frac{\sin h_0 - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$	satni kut pri zadanoj visini h_0
$\cos A_0 = \frac{\sin \delta}{\cos \varphi}$	azimut izlaska (od sjevera)
$\delta_\odot \approx 23,44^\circ \sin\left(\frac{360^\circ}{365}(n - 81)\right)$	deklinacija Sunca, n je redni dan u godini
$\Delta t = 4^{\min} \cdot \Delta \lambda [^\circ]$	razlika mjesnih vremena
$\theta_G = 280,4606^\circ + 360,9857^\circ (\text{JD} - 2\,451\,545,0)$	greenwichko zvjezdano vrijeme
H	satni kut, mjereno od meridijana prema zapadu
θ	mjesno zvjezdano vrijeme
A	azimut
λ	geografska dužina (istočna pozitivna)
JD	julijanski datum

Julijanski datum: ako je $M \leq 2$, uzmi $Y \rightarrow Y - 1$ i $M \rightarrow M + 12$; zatim $A = \lfloor Y/100 \rfloor$, $B = 2 - A + \lfloor A/4 \rfloor$ i $\text{JD} = \lfloor 365,25(Y+4716) \rfloor + \lfloor 30,6001(M+1) \rfloor + D + B - 1524,5$.

Najčešće pogreške. Ispuštanje polovice kod julijanskog datuma; zbrajanje umjesto oduzimanja u $H = \theta - \alpha$; i pretvorba geografske dužine u vrijeme s faktorom 15 umjesto 4 — stupanj dužine odgovara četiri minute, a jedan sat odgovara 15° .

- 2.1. **Š** Objekt je na visini 62° . Kolika mu je zenitna daljina?
- 2.2. **Š** Zvijezda s $\alpha = 14^{\text{h}}20^{\text{m}}$ upravo kulminira. Koliko je mjesno zvjezdano vrijeme?
- 2.3. **Š** Mjesno zvjezdano vrijeme je $8^{\text{h}}00^{\text{m}}$, a zvijezda ima $\alpha = 5^{\text{h}}30^{\text{m}}$. Koliki joj je satni kut?
- 2.4. **Š** Što znači da zvijezda ima satni kut $H = -3^{\text{h}}$?
- 2.5. **Š** Za koliko se mjesno sunčevo vrijeme u Osijeku ($\lambda = 18,7^\circ \text{ E}$) razlikuje od pojasnog vremena CET? Žuri li Osijek ili kasni?
- 2.6. **Š** Kolika je visina Sunca u pravom podne u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$) na dan ekvinocija?
- 2.7. **Š** Koliko zvjezdanih i koliko sunčevih dana ima u jednoj godini?
- 2.8. **Š** Kolika je deklinacija Sunca prvog svibnja ($n = 121$)?
- 2.9. **Š** Koje vrijeme pokazuje sunčani sat i po čemu se ono razlikuje od vremena na zidnom satu?
- 2.10. **Š** Zvijezda ima $\delta = +80^\circ$, a promatrač je na $\varphi = 45^\circ$. Kulminira li ona sjeverno ili južno od zenita i na kojoj visini?
- 2.11. **Ž** Koliko traje dan u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$) na zimski suncostaj? Refrakciju zanemarite.
- 2.12. **Ž** Koliko je mjesno zvjezdano vrijeme u ponoć na dan proljetnog ekvinocija? Obrazložite.
- 2.13. **Ž** Zvijezda ima $\alpha = 20^{\text{h}}$ i $\delta = +45^\circ$. Kolika joj je visina kad je zvjezdano vrijeme $\theta = 22^{\text{h}}$, gledano s $\varphi = 45^\circ$?
- 2.14. **Ž** Trećeg studenoga jednadžba vremena iznosi $+16,4 \text{ min}$. Sunčani sat pokazuje točno podne. Koliko je srednje sunčevo vrijeme?
- 2.15. **Ž** Izračunajte julijanski datum za 1. siječnja 2027. u 0^{h} UT.
- 2.16. **Ž** Za koliko se rektascenzija Sunca promijeni tijekom jednog dana? Izrazite odgovor u minutama vremena i u stupnjevima.
- 2.17. **Ž** Koliki je azimut izlaska Sunca u Puli ($\varphi = 44,87^\circ$) na dan ljetnog suncostaja? Azimut mjerite od sjevera.
- 2.18. **Ž** Koliko dugo Sunce neprekidno ostaje iznad horizonta na sjevernom polu i zašto je taj period nešto dulji od pola godine?
- 2.19. **Ž** Promatrač je na $\lambda = 15^\circ \text{ E}$, greenwichko zvjezdano vrijeme iznosi 1^{h} , a zvijezda ima $\alpha = 2^{\text{h}}$. Gdje se zvijezda nalazi u odnosu na meridijan?
- 2.20. **Ž** Koliko puta godišnje Sunce prolazi kroz zenit u Zagrebu? Obrazložite odgovor uvjetom na geografsku širinu.
- 2.21. **D** Odredite ekliptičke koordinate λ i β zvijezde koja ima $\alpha = 6^{\text{h}}$ i $\delta = +20^\circ$. Uzmite $\varepsilon = 23,44^\circ$.
- 2.22. **D** Koliko traje astronomski sumrak u Puli ($\varphi = 44,87^\circ$) na dan ekvinocija? Uzmite $h_0 = -0^\circ50'$ za zalazak i -18° za kraj sumraka.
- 2.23. **D** Odredite mjesno zvjezdano vrijeme u Puli ($\lambda = 13,85^\circ \text{ E}$) 24. kolovoza 2026. u $22^{\text{h}}00^{\text{m}}$ ljetnog računanja vremena (CEST). Julijanski datum za 0^{h} UT toga dana iznosi 2 461 276,5.
- 2.24. **D** Pokažite koliko refrakcija produljuje dan na ekvinocij za $\varphi = 45^\circ$. Uzmite $h_0 = -0^\circ50'$.
- 2.25. **D** Na koji dan u godini dan u Puli ($\varphi = 44,87^\circ$) traje točno 14 sati? Odredite pripadnu deklinaciju Sunca.

3. Udaljenosti i zvjezdane veličine

O ovoj temi

Udaljenost je najteže mjerljiva veličina u astronomiji i istodobno ona bez koje gotovo ništa drugo nema smisla. Prividni sjaj zvijezde ne kazuje ništa o njoj samoj dok se ne zna koliko je daleko — ista magnituda može pripadati crvenom patuljku u susjedstvu i superdivu na drugom kraju Galaksije.

Prva stepenica ljestvice je **trigonometrijska paralaksa**, jedina metoda koja počiva isključivo na geometriji i ne pretpostavlja ništa o samoj zvijezdi. Iz nje izravno slijedi definicija parseka. Druga je alat koji povezuje sjaj i udaljenost: **modul udaljenosti**, u koji se, kad se gleda kroz prašinu, mora ubaciti i član ekstinkcije. Treći je element **logaritamska** priroda magnitudske skale, koja iznenađuje sve dok se ne prihvati da razlika od pet magnituda znači omjer sjaja od sto puta.

Računski su zadatci ovdje jednostavni, ali traže pažljivo baratanje logaritmima i predznacima. Vrijedi zapamtiti nekoliko sidrenih vrijednosti: Sunce ima $M_V = +4,83$, granica golog oka je oko šeste magnitude, a razlika od jedne magnitude odgovara omjeru 2,512.

Poglavlje uvodi i pojmove koji se poslije stalno vraćaju. **Apsolutna magnituda** je dogovor koji uklanja utjecaj udaljenosti i time omogućuje izravnu usporedbu zvijezda, a **vlastito gibanje** spaja kutnu i linearnu brzinu preko udaljenosti. Oboje su preduvjet za HR-dijagram i za sve što slijedi iz njega, pa se isplati ovdje ih usvojiti temeljito.

Što poglavlje pokriva

- trigonometrijska paralaksa i definicija parseka
- prividna i apsolutna magnituda, modul udaljenosti
- omjeri osvjetljenja i zbrajanje magnituda
- međuzvjezdana ekstinkcija
- vlastito gibanje i tangencijalna brzina

Pregled jednadžbi

$d [\text{pc}] = \frac{1}{p ["]}$	trigonometrijska paralaksa
$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{E_1}{E_2}$	Pogsonova relacija
$\frac{E_1}{E_2} = 10^{-0,4 (m_1 - m_2)}$	omjer osvjetljenja
$m - M = 5 \log d [\text{pc}] - 5 + A$	modul udaljenosti s ekstinkcijom
$m_{uk} = -2,5 \log \left(\sum_i 10^{-0,4 m_i} \right)$	zbrajanje magnituda
$v_t = 4,74 \mu ["/\text{god}] \cdot d [\text{pc}]$	tangencijalna brzina [km/s]

- p godišnja paralaksa
 m prividna zvjezdana veličina
 M apsolutna zvjezdana veličina (na 10 pc)
 A međuzvjezdana ekstinkcija u magnitudama
 μ vlastito gibanje
 E osvjetljenje (snaga po jedinici površine)

Pretvorbe: $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ AJ} = 3,26 \text{ ly} = 3,086 \times 10^{16} \text{ m}$; $1 \text{ ly} = 63\,241 \text{ AJ}$; $1 \text{ AJ} = 499$ svjetlosnih sekundi. Razlika od 5 magnituda znači omjer sjaja 100, a od 1 magnitude 2,512.

Najčešće pogreške. Predznak u Pogsonovoj relaciji — *veća* magnituda znači *slabiji* objekt; ispuštanje ekstinkcije pri računanju udaljenosti kroz galaktičku ravninu; i zbrajanje magnituda kao da su obični brojevi umjesto zbrajanja osvjetljenja.

- 3.1. **Š** Zvijezda ima paralaksu $p = 0,050''$. Kolika joj je udaljenost u parsecima i u svjetlosnim godinama?
- 3.2. **Š** Zvijezda je udaljena 15 pc. Kolika joj je paralaksa?
- 3.3. **Š** Koliko astronomskih jedinica ima u jednoj svjetlosnoj godini?
- 3.4. **Š** Dvije zvijezde razlikuju se za 2,5 magnituda. Koliki je omjer njihovih osvjetljenja?
- 3.5. **Š** Dvije jednake zvijezde, svaka magnitude 6,0, prividno se stapaju u jednu. Kolika je magnituda tog para?
- 3.6. **Š** Koliko je puta Sirius ($m = -1,46$) sjajniji od Vege ($m = 0,03$)?
- 3.7. **Š** Koliko je jedan parsek u svjetlosnim godinama?
- 3.8. **Š** Proxima Centauri udaljena je 4,24 ly. Koliko je stara svjetlost kojom je večeras vidimo?
- 3.9. **Š** Za koliko se magnituda razlikuju dvije zvijezde ako je jedna sto puta slabija od druge?
- 3.10. **Š** Zašto se trigonometrijska paralaksa ne može upotrijebiti za zvijezde udaljenije od nekoliko tisuća parseka?
- 3.11. **Ž** Zvijezda ima $m = 8,4$ i $M = 2,1$. Kolika joj je udaljenost?
- 3.12. **Ž** Zvijezda je na 250 pc i ima $M = -1,5$. Kolika joj je prividna magnituda?
- 3.13. **Ž** Tri bliske zvijezde imaju magnitude 7,2, 7,8 i 8,5. Kolika je njihova zajednička magnituda?
- 3.14. **Ž** Kolika bi bila prividna magnituda Sunca kad bi ono bilo na 10 pc?
- 3.15. **Ž** Zvijezda ima $m = M = 5,0$. Kolika joj je paralaksa?
- 3.16. **Ž** Kvazar ima $m = 13$ i $M = -26$. Na kojoj se udaljenosti nalazi? Izrazite rezultat u megaparsecima.
- 3.17. **Ž** Koliko je puta Sunce ($m = -26,74$) sjajnije od punog Mjeseca ($m = -12,70$)?
- 3.18. **Ž** Paralaksa je izmjerena kao $p = (0,0200 \pm 0,0010)''$. Odredite udaljenost i njezinu nesigurnost.
- 3.19. **Ž** Koliki put svjetlost prijeđe dok Zemlja jednom obiđe Sunce? Izrazite ga u svjetlosnim godinama i u astronomskim jedinicama.
- 3.20. **Ž** Barnardova zvijezda ima paralaksu $0,547''$ i vlastito gibanje $10,36''$ godišnje. Kolika joj je tangencijalna brzina?
- 3.21. **D** Zvijezda ima $m_V = 9,0$ i nalazi se na 500 pc, uz ekstinkciju $A_V = 1,2$ mag. Kolika joj je apsolutna magnituda? Koliko biste pogriješili da ste ekstinkciju zanemarili?
- 3.22. **D** Kolika bi bila prividna magnituda Sunca gledanog s Proxime Centauri ($d = 1,30$ pc)? Bi li bilo vidljivo golim okom?
- 3.23. **D** Zvijezda A ima $M = -5,0$ i nalazi se na 2000 pc. Na kojoj bi udaljenosti zvijezda B s $M = +5,0$ imala jednaku prividnu magnitudu?
- 3.24. **D** Kuglasti skup sadrži 10^5 zvijezda prosječne apsolutne magnitude $M = +4,0$. Kolika je apsolutna magnituda cijelog skupa?
- 3.25. **D** Zvijezda magnitude $m = 0$ šalje u prosjeku $1,0 \times 10^6$ fotona u sekundi na svaki kvadratni centimetar. Koliko fotona u sekundi uđe u oko (zjenica promjera 7 mm) od zvijezde na granici vidljivosti, $m = 6,0$?

4. Nebeska mehanika

O ovoj temi

Nebeska mehanika je dio astronomije u kojem se najmanje raspravlja i najviše računa. Tri Keplerova zakona opisuju *kako* se tijela gibaju, Newtonov zakon gravitacije objašnjava *zašto*, a njihov spoj daje ono najvrjednije: iz opažene staze slijedi **masa**. To je jedini način na koji se mase u svemiru uopće mjere.

Ključ za brzo rješavanje leži u izboru jedinica. Izrazi li se velika poluos u astronomskim jedinicama, period u godinama i masa u Sunčevim masama, treći Keplerov zakon gubi svaku konstantu i svodi se na $M_1 + M_2 = a^3/T^2$. Za satelite oko Zemlje isto vrijedi uz $GM_\oplus$, a za sve ostalo tu je **vis-viva** jednadžba, koja jednom formulom pokriva kružnicu, elipsu, parabolu i hiperbolu.

Zadatci se svode na prepoznavanje što je zadano. Perihel i afel daju a i e ; a i T daju masu; r i a daju brzinu. Uz to ide i mali skup pojmova koji se često miješaju: prva kozmička brzina drži tijelo na kružnoj stazi, druga ga oslobađa iz gravitacijskog polja, a treća iz cijelog Sunčeva sustava.

Što poglavlje pokriva

- Keplerovi zakoni i Newtonova generalizacija
- elementi staze: velika poluos, ekscentricitet, perihel i afel
- vis-viva jednadžba i energija na stazi
- kozmičke brzine i umjetni sateliti
- sinodički period i Lagrangeove točke

Pregled jednadžbi

$T^2 = a^3$	treći Keplerov zakon (T u god, a u AJ)
$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}$	Newtonova generalizacija (M u $M_\odot$)
$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M_1 + M_2)}{4\pi^2}$	ista jednadžba u SI jedinicama
$r_p = a(1 - e), \quad r_a = a(1 + e)$	perihel i afel
$v_p r_p = v_a r_a$	drugi Keplerov zakon
$v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$	vis-viva jednadžba
$E = -\frac{GMm}{2a}$	ukupna energija na stazi
$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad v_2 = \sqrt{2} v_1$	prva i druga kozmička brzina
$\frac{1}{S} = \left \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right $	sinodički period

a velika poluos
 e numerički ekscentricitet
 T siderički (ophodni) period
 S sinodički period
 r trenutna udaljenost od žarišta

Korisno: $GM_\odot = 1,327 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $GM_\oplus = 3,986 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2$. Hohmannov transfer: $a_t = (r_1 + r_2)/2$, a let traje pola perioda te staze.

Najčešće pogreške. Uvrštavanje polumjera umjesto velike poluosi u vis-viva jednadžbu; miješanje sideričkog i sinodičkog perioda; i zaboravljanje da se u trećem Keplerovom zakonu pojavljuje *zbroj* masa, a ne samo masa središnjeg tijela.

- 4.1. **Š** Planet ima veliku poluos $a = 9$ AJ. Koliki mu je ophodni period?
- 4.2. **Š** Tijelo ima ophodni period 8 godina. Kolika mu je velika poluos?
- 4.3. **Š** Staza ima $a = 2$ AJ i $e = 0$. Koliki su perihel i afel?
- 4.4. **Š** Tijelo ima perihel 1 AJ i afel 5 AJ. Odredite a , e i T .
- 4.5. **Š** Kolika je prva kozmička brzina za Mjesec? ($GM_{\text{Mj}} = 4,903 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $R = 1737 \text{ km}$)
- 4.6. **Š** Kolika je brzina bijega s Mjeseca?
- 4.7. **Š** Jupiter ima ophodni period 11,86 godina. Kolika mu je velika poluos?
- 4.8. **Š** Zašto se Zemlja u siječnju giba brže nego u srpnju?
- 4.9. **Š** Sustav dvaju tijela ima $a = 10$ AJ i $T = 20$ godina. Kolika mu je ukupna masa?
- 4.10. **Š** Objasnite zašto tijelo na paraboličnoj stazi ima ukupnu energiju jednaku nuli.
- 4.11. **Ž** Komet ima $a = 10$ AJ i $e = 0,90$. Odredite perihel, afel te brzine u perihelu i afelu.
- 4.12. **Ž** Kalisto kruži oko Jupitera s $a = 1,883 \times 10^6 \text{ km}$ i $T = 16,689$ dana. Odredite masu Jupitera.
- 4.13. **Ž** Odredite polumjer geostacionarne staze. Zvezdani dan traje 86 164 s.
- 4.14. **Ž** Koliki je sinodički period Jupitera?
- 4.15. **Ž** Koliko traje Hohmannov let sa Zemljine na Venerinu stazu ($r_2 = 0,723$ AJ)?
- 4.16. **Ž** Kolika je prva kozmička brzina za Mars? ($GM_{\text{Ma}} = 4,283 \times 10^{13} \text{ m}^3/\text{s}^2$, $R = 3390 \text{ km}$)
- 4.17. **Ž** Satelit mase 1000 kg kruži oko Zemlje po stazi $a = 10\,000 \text{ km}$. Kolika mu je ukupna mehanička energija?
- 4.18. **Ž** Koliki su period i velika poluos asteroida u rezonanciji 2:1 s Jupiterom?
- 4.19. **Ž** Zemlja u perihelu je na 0,9833 AJ. Kolika joj je ondje brzina?
- 4.20. **Ž** Objasnite zašto je treća kozmička brzina (16,7 km/s) manja od zbroja druge kozmičke brzine Zemlje i brzine bijega iz Sunčeva sustava na Zemljinoj udaljenosti.
- 4.21. **D** Izvedite iz zakona očuvanja energije da je brzina bijega $\sqrt{2}$ puta veća od kružne brzine na istoj udaljenosti.
- 4.22. **D** Odredite masu Zemlje iz podataka o geostacionarnoj stazi ($r = 42\,164 \text{ km}$, $T = 86\,164 \text{ s}$).
- 4.23. **D** Koliko bi trajao dan da se Zemlja vrti toliko brzo da tijela na ekvatoru više ne pritišću tlo?
- 4.24. **D** Lagrangeova točka L_1 u sustavu Sunce–Zemlja nalazi se približno na udaljenosti $r \approx a(m/3M)^{1/3}$ od Zemlje. Odredite r i usporedite ga s udaljenošću Mjeseca. ($m/M = 3,00 \times 10^{-6}$)
- 4.25. **D** Pokažite da je omjer brzina u perihelu i afelu jednak $(1+e)/(1-e)$ i odredite ekscentricitet staze na kojoj je taj omjer jednak 3.

5. Elektromagnetsko zračenje i zračenje crnog tijela

O ovoj temi

Osim malog broja meteorita i uzoraka koje su donijele sonde, sve što o svemiru znamo stiglo je kao zračenje. Zato je razumijevanje svjetlosti preduvjet za sve ostalo. Svjetlost je istodobno val, opisan valnom duljinom i frekvencijom, i tok fotona, od kojih svaki nosi energiju $E = hc/\lambda$ — a upravo taj dvostruki opis omogućuje da se iz jednog spektra iščita temperatura, sastav i brzina izvora.

Zvijezde su vrlo dobra približenja **crnog tijela**, pa im oblik spektra određuje samo jedan broj: temperatura. Iz nje Wienov zakon daje valnu duljinu maksimuma, a Stefan-Boltzmannov ukupnu izračenu snagu. Spoj tih dvaju zakona s površinom kugle daje najkorisniju jednadžbu u astrofizici zvijezda, $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$, iz koje se — ovisno o tome što je poznato — dobiva luminozitet, polumjer ili temperatura.

Drugi dio poglavlja bavi se **linijama**. One nastaju prijelazima elektrona među razinama i nose potpis pojedinog elementa, a njihov pomak odaje radijalnu brzinu. Dopplerova formula ovdje je nerelativistička; njezin relativistički oblik postaje nužan tek kod $z > 0,1$, dakle kod dalekih galaksija i kvazara.

Što poglavlje pokriva

- veza valne duljine, frekvencije i energije fotona
- Wienov i Stefan-Boltzmannov zakon
- luminozitet, polumjer i temperatura zvijezde
- nastanak spektralnih linija i energijske razine vodika

Pregled jednadžbi

$c = \lambda\nu, \quad E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$	val i foton
$\lambda_{\max} T = 2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$	Wienov zakon pomaka
$F = \sigma T^4$	Stefan-Boltzmannov zakon
$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$	luminozitet
$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{T}{T_{\odot}}\right)^4$	ista jednadžba u Sunčevim jedinicama
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v_r}{c}$	Dopplerov efekt (nerelativistički)
$\frac{v}{c} = \frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}$	relativistički oblik
$E_n = -\frac{13,6 \text{ eV}}{n^2}$	energijske razine vodika
$T_{\text{eq}} = 278,3 \text{ K} \cdot \frac{(1-A)^{1/4}}{\sqrt{d[\text{AJ}]}}$	ravnotežna temperatura u Sunčevu sustavu

λ valna duljina
 ν frekvencija
 F snaga po jedinici površine
 z crveni pomak
 A albedo

Korisno: $hc = 1240 \text{ eV nm}$; $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W/(m}^2\text{K}^4)$; $T_{\odot} = 5772 \text{ K}$. Balmerove linije: $H\alpha$ 656,3 nm, $H\beta$ 486,1 nm, $H\gamma$ 434,0 nm.

Najčešće pogreške. Uvrštavanje valne duljine u nanometrime u Wienov zakon bez pretvorbe u metre; zaboravljanje četvrte potencije kod Stefan-Boltzmannova zakona; i primjena klasične Dopplerove formule na velike crvene pomake, gdje daje brzine veće od c .

- 5.1. **Š** Kolika je frekvencija svjetlosti valne duljine 600 nm?
- 5.2. **Š** Radioastronomska linija vodika ima frekvenciju 1420 MHz. Kolika joj je valna duljina?
- 5.3. **Š** Zvijezda ima površinsku temperaturu 3500 K. Na kojoj valnoj duljini najjače zrači?
- 5.4. **Š** Zvijezda najjače zrači na 145 nm. Kolika joj je temperatura?
- 5.5. **Š** Kolika je energija fotona linije $H\alpha$, izražena u elektronvoltima?
- 5.6. **Š** Zvijezda ima tri puta veći polumjer od Sunca uz jednaku temperaturu. Koliko joj je puta veći luminozitet?
- 5.7. **Š** Zvijezda ima dvostruko veću temperaturu od Sunca uz jednak polumjer. Koliko joj je puta veći luminozitet?
- 5.8. **Š** Zašto je nebo danju plavo, a Sunce pri zalasku crveno?
- 5.9. **Š** Koja se područja elektromagnetskog spektra ne mogu opažati sa Zemljine površine i zašto?
- 5.10. **Š** Zvijezda ima maksimum zračenja u ultraljubičastom području. Je li ona vruća ili hladna? Koje bi mogla biti spektralne klase?
- 5.11. **Ž** Zvijezda ima $T = 20\,000\text{ K}$ i $R = 5 R_{\odot}$. Koliki joj je luminozitet u Sunčevim jedinicama?
- 5.12. **Ž** Zvijezda ima $L = 0,001 L_{\odot}$ i $T = 8000\text{ K}$. Koliki joj je polumjer? Kakav je to objekt?
- 5.13. **Ž** Linija $H\beta$ ($\lambda_0 = 486,1\text{ nm}$) izmjerena je na 485,2 nm. Kolika je radijalna brzina i u kojem se smjeru objekt giba?
- 5.14. **Ž** Kolika bi bila ravnotežna temperatura Zemlje kad bi joj albedo bio nula? Solarna konstanta iznosi 1361 W/m^2 .
- 5.15. **Ž** Koliko energije u sekundi izrači jedan kvadratni metar Sunčeve površine?
- 5.16. **Ž** Iz rezultata prethodnog zadatka izračunajte ukupni luminozitet Sunca. ($R_{\odot} = 6,957 \times 10^8\text{ m}$)
- 5.17. **Ž** Koju valnu duljinu ima foton koji nastane prijelazom elektrona s razine $n = 4$ na $n = 2$ u atomu vodika? Kojoj liniji odgovara?
- 5.18. **Ž** Kolika je valna duljina fotona koji može ionizirati vodik iz osnovnog stanja? U kojem je to području spektra?
- 5.19. **Ž** Galaksija ima crveni pomak $z = 0,020$. Kolika joj je brzina udaljavanja, računato nerelativistički?
- 5.20. **Ž** Zvijezda ima indeks boje $B - V = 0,00$. Kojoj spektralnoj klasi pripada i kolika joj je približna temperatura?
- 5.21. **D** Zvijezda ima $L = 1,5 \times 10^4 L_{\odot}$ i $T = 3400\text{ K}$. Odredite joj polumjer u Sunčevim polumjerima i u astronomskim jedinicama. Kakav je to objekt?
- 5.22. **D** Pokažite da za dvije zvijezde jednakog luminoziteta vrijedi $R_1/R_2 = (\lambda_{\max,1}/\lambda_{\max,2})^2$.
- 5.23. **D** Kolikom je toplinskom proširenju podvrgnuta natrijeva linija ($\lambda = 589\text{ nm}$) u atmosferi zvijezde temperature 6000 K? ($m_{\text{Na}} = 23 u$, $u = 1,66 \times 10^{-27}\text{ kg}$, $k = 1,38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$)
- 5.24. **D** Galaksija ima $z = 0,50$. Kolika joj je brzina udaljavanja relativistički, i koliko biste pogriješili računajući nerelativistički?
- 5.25. **D** Koliko fotona u sekundi emitira Sunce, ako je prosječna valna duljina 500 nm?

6. Teleskopi i opažački instrumenti

O ovoj temi

Teleskop radi tri stvari: skuplja svjetlost, razlučuje pojedinosti i povećava. Od toga je posljednja daleko najmanje važna, iako je jedina koja stoji na kutiji. Skupljanje svjetlosti raste s D^2 , moć razlučivanja s D , a povećanje se mijenja zamjenom okulara i ne stvara ništa čega u slici već nema.

Zbog toga se gotovo svi zadatci u ovom poglavlju vrte oko **promjera objektiva**. Iz njega slijedi granična magnituda, najmanji razlučivi kut, količina prikupljene svjetlosti i potrebno vrijeme ekspozicije. Okular i žarišna duljina određuju povećanje, izlaznu zjenicu i vidno polje — veličine koje odlučuju hoće li instrument biti ugodan za rad, ali ne i koliko će daleko doprijeti.

Poglavlje uključuje i granice koje postavlja priroda. Ogib svjetlosti daje teorijsku granicu razlučivanja, ali atmosfera je sa Zemlje gotovo uvijek nadglasa, pa se stvarna oštrina mjeri seeingom. Radiovalovima je valna duljina milijun puta veća, pa je razlučivanje pojedine antene katastrofalno — rješenje nije veća antena, nego interferometrija, gdje razlučivanje određuje razmak antena, a ne njihov promjer.

Što poglavlje pokriva

- povećanje, otvorni broj, izlazna zjenica i vidno polje
- skupljanje svjetlosti i granična magnituda
- moć razlučivanja i utjecaj seeinga
- tipovi teleskopa i optičke aberacije
- radioteleskopi, interferometrija i skala slike

Pregled jednadžbi

$M = \frac{f_{\text{obj}}}{f_{\text{ok}}}$	kutno povećanje
$N = \frac{f_{\text{obj}}}{D}$	otvorni broj
$d_{\text{iz}} = \frac{D}{M} = \frac{f_{\text{ok}}}{N}$	izlazna zjenica
$\text{PVP} = \frac{\text{prividno vidno polje okulara}}{M}$	pravo vidno polje
$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} [\text{rad}] \approx \frac{138''}{D [\text{mm}]}$	moć razlučivanja
$m_{\text{gran}} \approx 2 + 5 \log D [\text{mm}]$	granična magnituda
$\text{skala} = \frac{206\,265''}{f [\text{mm}]} ["/\text{mm}]$	skala slike u žarišnoj ravnini
$\theta \approx \frac{\lambda}{B}$	razlučivanje interferometra
D promjer objektiva	
f žarišna duljina	
B baza interferometra	
θ najmanji razlučivi kut	

Skupljanje svjetlosti razmjerno je D^2 . Korisno povećanje ide otprilike od $D/7$ do $2D$ (uz D u milimetrima).

Najčešće pogreške. Uvrštavanje promjera u metrima u praktičnu formulu $\theta = 138''/D$, koja traži milimetre; miješanje pravog i prividnog vidnog polja; i zaključivanje da veće povećanje znači bolji teleskop.

- 6.1. **Š** Teleskop ima $D = 150$ mm i $f = 750$ mm, a okular 25 mm. Odredite povećanje, otvorni broj i izlaznu zjenicu.
- 6.2. **Š** Kolika je teorijska moć razlučivanja teleskopa promjera 150 mm?
- 6.3. **Š** Koliko puta više svjetlosti taj teleskop skuplja od oka sa zjenicom od 7 mm?
- 6.4. **Š** Kolika mu je granična magnituda?
- 6.5. **Š** Okular ima prividno vidno polje 68° , a povećanje je $30\times$. Koliko je pravo vidno polje?
- 6.6. **Š** Zašto je Dobsonov teleskop znatno jeftiniji od jednako velikog teleskopa na ekvatorijalnoj montaži?
- 6.7. **Š** Koja se aberacija javlja isključivo kod leća i zašto?
- 6.8. **Š** Što je seeing i u kojim se jedinicama izražava?
- 6.9. **Š** Radioteleskop promjera 64 m radi na valnoj duljini 6 cm. Kolika mu je moć razlučivanja u lučnim minutama?
- 6.10. **Š** Kolika je skala slike teleskopa žarišne duljine 600 mm?
- 6.11. **Ž** Koji okular treba da se na teleskopu žarišne duljine 2000 mm postigne povećanje $200\times$?
- 6.12. **Ž** Kolika je izlazna zjenica teleskopa $D = 200$ mm pri povećanju $50\times$? Je li to razumna vrijednost?
- 6.13. **Ž** Koje je najmanje korisno povećanje teleskopa promjera 300 mm i zašto manje od toga nema smisla?
- 6.14. **Ž** Koje je najveće korisno povećanje istog teleskopa i što se događa iznad njega?
- 6.15. **Ž** Koliko puta dulje treba eksponirati teleskopom promjera 80 mm nego onim od 200 mm da bi se postigao isti omjer signala i šuma?
- 6.16. **Ž** Interferometar radi na $\lambda = 1,3$ mm s bazom $B = 1$ km. Kolika mu je moć razlučivanja u lučnim sekundama?
- 6.17. **Ž** Kamera ima piksel stranice $3,76\ \mu\text{m}$, a teleskop $f = 1200$ mm. Kolika je skala slike po pikselu?
- 6.18. **Ž** Koliko piksela pokriva Jupiter, čiji kutni promjer iznosi $40''$, pri toj skali?
- 6.19. **Ž** Teleskop ima otvorni broj $f/4$ i promjer 250 mm. Kolika mu je žarišna duljina i koje su prednosti takva „brzog“ sustava?
- 6.20. **Ž** Zašto su najveći suvremeni teleskopi ipak na azimutalnim montažama, iako one zakreću vidno polje?
- 6.21. **D** Izvedite izraz $m_{\text{gran}} \approx \text{konst.} + 5 \log D$ polazeći od toga da je količina prikupljene svjetlosti razmjerna D^2 .
- 6.22. **D** Koliki promjer objektiva treba da se razluči dvojna zvijezda razmaka $0,50''$ pri $\lambda = 550$ nm?
- 6.23. **D** Bi li teleskop promjera 2 m postavljen na Mjesecu mogao razlučiti pojedinost veličine 100 m na Zemljinoj površini? Udaljenost je $3,844 \times 10^5$ km.
- 6.24. **D** Dva teleskopa imaju promjere 200 mm i 400 mm. Ako u šumu prevladava fotonski šum samog objekta, koliki je omjer njihovih S/N pri istoj ekspoziciji?
- 6.25. **D** Zašto se moć razlučivanja radiointerferometra opisuje izrazom λ/B , a ne $1,22\lambda/D$?

7. Sunčev sustav: planeti

O ovoj temi

Sunčev sustav nije zbirka nepovezanih tijela nego ostatak jednog procesa, pa se gotovo sve razlike među planetima mogu izvesti iz jedne granice. **Linija leda** na oko 2,7 AJ dijelila je protoplanetarni disk na topli dio, gdje je od gradiva ostala samo stijena i metal, i hladni, gdje je leda bilo nekoliko puta više. Unutar nje planeti su ostali mali i gusti, izvan nje jezgre su brzo narasle i uspjele zarobiti plin.

Računski dio poglavlja oslanja se na nekoliko jednostavnih alata. Gustoća razlikuje stjenoviti svijet od plinovitog, brzina bijega u kombinaciji s temperaturom odlučuje hoće li tijelo zadržati atmosferu, a ravnotežna temperatura pokazuje koliko bi bilo toplo bez efekta staklenika — razlika u odnosu na stvarnu temperaturu izravno mjeri koliko atmosfera zadržava topline.

Uz to ide i skupina zadataka o gibanju kako ga vidimo sa Zemlje: sinodički period, elongacije, konfiguracije i plimne sile. Ondje treba paziti na to da se sve mjeri iz sustava koji se i sam giba, pa se prividno gibanje planeta razlikuje od pravog — otud i retrogradne petlje koje su dvije tisuće godina mučile astronome.

Što poglavlje pokriva

- nastanak Sunčeva sustava i uloga linije leda
- gustoća, brzina bijega i gravitacija na površini
- ravnotežna temperatura i efekt staklenika
- zadržavanje atmosfere
- prstenovi, Rocheova granica i plimne sile

Pregled jednadžbi

$\frac{1}{S} = \left \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T_p} \right $	sinodički period
$\sin \varepsilon_{\max} = \frac{r_p}{r_{\oplus}}$	najveća elongacija unutarnjeg planeta
$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$	srednja gustoća
$g = \frac{GM}{R^2}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$	ubrzanje i brzina bijega
$T_{\text{eq}} = 278,3 \text{ K} \cdot \frac{(1-A)^{1/4}}{\sqrt{d [\text{AJ}]}}$	ravnotežna temperatura
$v_{\text{term}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$	toplinska brzina molekule
$d_{\text{Roche}} \approx 2,44 R \left(\frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{1/3}$	Rocheova granica
$F_{\text{plim}} \propto \frac{M}{r^3}$	plimna sila
S	sinodički period
A	albedo
ρ_M	gustoća matičnog tijela
ρ_m	gustoća satelita

Atmosfera se zadržava milijardama godina ako je $v_2 > 6 v_{\text{term}}$. Linija leda leži oko 2,7 AJ.

Najčešće pogreške. Upotreba formule za vanjski planet kad je riječ o unutarnjem (i obrnuto) pri računanju sinodičkog perioda; miješanje polumjera i promjera pri računanju gustoće; i zaboravljanje da ravnotežna temperatura vrijedi za tijelo *bez* atmosfere.

- 7.1. **Š** Koliki je sinodički period Saturna ($T = 29,46$ god)?
- 7.2. **Š** Odredite srednju gustoću Merkura. ($M = 3,301 \times 10^{23}$ kg, $R = 2440$ km)
- 7.3. **Š** Kolika je gravitacijska akceleracija na površini Mjeseca? ($GM = 4,903 \times 10^{12}$ m³/s², $R = 1737$ km)
- 7.4. **Š** Kolika je brzina bijega s Venere? ($GM = 3,249 \times 10^{14}$ m³/s², $R = 6052$ km)
- 7.5. **Š** Zašto Venera, unatoč gotovo Zemljinoj masi, nema magnetsko polje?
- 7.6. **Š** Koji planet ima najveći nagib osi i kakve to posljedice ima za izmjenu godišnjih doba na njemu?
- 7.7. **Š** Koliko traje dan na Veneri i kako se to odnosi prema njezinoj godini?
- 7.8. **Š** Zašto su temperaturne razlike između dana i noći na Merкуру najveće u Sunčevu sustavu?
- 7.9. **Š** Koji planet ima najveću srednju gustoću i zašto?
- 7.10. **Š** Koliko Zemljinih masa ima Saturn i koliko Zemljinih polumjera?
- 7.11. **Ž** Kolika je ravnotežna temperatura Marsa? Uzmite $a = 1,524$ AJ i albedo $A = 0,25$.
- 7.12. **Ž** Koliki je sinodički period Merkura ($T = 0,241$ god)?
- 7.13. **Ž** Kolika je najveća elongacija Merkura, uz $a = 0,387$ AJ?
- 7.14. **Ž** Koliko je puta osvijetljenje Sunca slabije na Neptunu (30,1 AJ) nego na Zemlji?
- 7.15. **Ž** Odredite srednju gustoću Urana. ($M = 8,681 \times 10^{25}$ kg, $R = 25\,362$ km)
- 7.16. **Ž** Koliko je puta plimna sila Mjeseca na Zemlju veća od plimne sile Sunca? ($M_{\text{Mj}} = 7,342 \times 10^{22}$ kg na $3,844 \times 10^8$ m; $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$ kg na $1,496 \times 10^{11}$ m)
- 7.17. **Ž** Marsova godina traje 687 zemaljskih dana, a marsovski dan (sol) 1,0275 zemaljskog dana. Koliko sola ima marsovska godina?
- 7.18. **Ž** Kolika je ravnotežna temperatura Merkura ($a = 0,387$ AJ, $A = 0,12$)? Zašto je stvarna temperatura na podnevnoj strani mnogo viša?
- 7.19. **Ž** Zašto Titan zadržava gustu atmosferu iako je manji od Merkura, koji je nema?
- 7.20. **Ž** Koliki je kutni promjer Sunca gledanog s Jupitera?
- 7.21. **D** Odredite Rocheovu granicu Zemlje za tijelo gustoće 3000 kg/m³ i usporedite je s udaljenošću Mjeseca.
- 7.22. **D** Koliki je najkraći period rotacije koji asteroid gustoće 2000 kg/m³ može imati a da se ne raspadne? Uputa: na ekvatoru centrifugalno ubrzanje ne smije prijeći gravitacijsko.
- 7.23. **D** Odredite masu Sunca iz podataka o Zemljinoj stazi ($a = 1,496 \times 10^{11}$ m, $T = 3,156 \times 10^7$ s).
- 7.24. **D** Koliko energije Zemlja primi od Sunca tijekom jedne godine? Solarna konstanta iznosi 1361 W/m², a $R_{\oplus} = 6371$ km.
- 7.25. **D** Na kojoj bi udaljenosti od zvijezde luminoziteta $4L_{\odot}$ planet imao istu ravnotežnu temperaturu kao Zemlja? Pokažite da odgovor ne ovisi o albedu.

8. Sunčev sustav: mala tijela

O ovoj temi

Mala tijela su najbolje sačuvani uzorci tvari od koje su nastali planeti, pa se iz njih čita ono što je na planetima davno izbrisano geološkom aktivnošću. Uz to su i jedina skupina objekata koja Zemlji može izravno nauditi, što im daje i praktičnu važnost.

Nit koja povezuje cijelo poglavlje je **rezonancija**. Ista pojava koja prazni glavni pojas i stvara Kirkwoodove pukotine drugdje tijela zadržava na stabilnim stazama — Trojance u Lagrangeovim točkama i plutine u omjeru 3:2 s Neptunom. Račun je u oba slučaja isti i svodi se na treći Keplerov zakon: iz omjera perioda slijedi velika poluos.

Drugi dio poglavlja bavi se kometima i meteorima. Kod kometa se najviše računa s elementima izdužene staze i s vis-viva jednadžbom, a kod meteora s energijama i sa zenitnim satnim brojem, jedinom formulom u zbirci koja pretvara ono što je opažatelj doista izbrojio u veličinu usporedivu s tuđim mjerenjima. Upravo je taj korak ono što amatersko opažanje rojeva čini znanstveno upotrebljivim.

Poglavlje uključuje i pitanja planetarne obrane, koja povezuju astronomiju s procjenom rizika. Energija udara raste s kvadratom brzine, pa i razmjerno malo tijelo može osloboditi energiju usporedivu s nuklearnim oružjem — Čeljabinski meteoroid promjera dvadesetak metara oslobodio je oko pola megatone. Zadatci te vrste traže samo kinetičku energiju i pretvorbu jedinica, ali dobro pokazuju zašto se katalogima objekata blizu Zemlje posvećuje tolika pozornost.

Što poglavlje pokriva

- glavni pojas, rezonancije i Kirkwoodove pukotine
- Trojanci, Kuiperov pojas i Oortov oblak
- građa i staze kometa
- meteorski rojevi i zenitni satni broj
- objekti blizu Zemlje i energija udara

Pregled jednadžbi

$a = a_J \left(\frac{n}{m}\right)^{2/3}$	položaj rezonancije $n:m$ s Jupiterom
$T^2 = a^3$	treći Keplerov zakon (god, AJ)
$a = \frac{r_p + r_a}{2}, \quad e = 1 - \frac{r_p}{a}$	elementi staze iz perihela i afela
$v^2 = GM_{\odot} \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$	vis-viva
$ZHR = \frac{N \cdot r^{6,5-m_{gr}}}{\sin h}$	zenitni satni broj roja
$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetička energija tijela
a_J	velika poluos Jupitera, 5,204 AJ
N	izbrojeni meteori na sat
m_{gr}	granična magnituda neba
h	visina radijanta
r	populacijski indeks roja

Korisno: 1 kt TNT = $4,184 \times 10^{12}$ J; Zemljina orbitalna brzina 29,8 km/s; brzina bijega sa Zemlje 11,2 km/s. Glavni pojas leži od 2,1 do 3,3 AJ, Kuiperov od 30 do 50 AJ.

Najčešće pogreške. Zamjena brojnika i nazivnika u omjeru rezonancije; računanje s perihelom umjesto s velikom poluosu u trećem Keplerovom zakonu; i izostavljanje korekcije za visinu radijanta pri računanju ZHR-a.

- 8.1. **Š** Koja je razlika između asteroida, kometa i meteoroida?
- 8.2. **Š** Odredite veliku poluos rezonancije 5:2 s Jupiterom.
- 8.3. **Š** Ceres ima $a = 2,77$ AJ. Koliki mu je ophodni period?
- 8.4. **Š** Zašto Kirkwoodove pukotine nisu vidljive na fotografiji neba, nego samo u statistici?
- 8.5. **Š** Komet ima ophodni period 76 godina. Kolika mu je velika poluos?
- 8.6. **Š** Zašto prašinasti rep kometa zaostaje i zakrivljuje se, a ionski ne?
- 8.7. **Š** Koja je razlika između Kuiperova pojasa i Oortova oblaka po obliku?
- 8.8. **Š** Zašto Trojanci ostaju na stabilnim stazama, a asteroidi u Kirkwoodovim pukotinama ne?
- 8.9. **Š** Meteorski roj ima radijant u zvijezdu Lava. Kako se on zove i što znači pojam radijanta?
- 8.10. **Š** Zašto je najviše meteora vidljivo poslije ponoći?
- 8.11. **Ž** Halleyev komet ima perihel 0,586 AJ i veliku poluos 17,83 AJ. Koliki mu je ekscentricitet i afel?
- 8.12. **Ž** Odredite veliku poluos rezonancije 7:3 s Jupiterom i usporedite je s položajem pripadne Kirkwoodove pukotine.
- 8.13. **Ž** Tijekom opažanja Geminida izbrojeno je 15 meteora na sat pri graničnoj magnitudi 5,0 i visini radijanta 55° . Uz $r = 2,5$ odredite ZHR.
- 8.14. **Ž** Meteoroid mase $4,0 \times 10^6$ kg ulazi u atmosferu brzinom 17 km/s. Kolika mu je kinetička energija, izražena u kilotonama TNT-a?
- 8.15. **Ž** Kolika je brzina Halleyeva kometa u perihelu? ($r_p = 0,586$ AJ, $a = 17,83$ AJ)
- 8.16. **Ž** Pluton ima veliku poluos 39,48 AJ. Koliki mu je ophodni period?
- 8.17. **Ž** Ukupna masa glavnog pojasa procjenjuje se na $2,4 \times 10^{21}$ kg. Koliki je to dio Zemljine mase?
- 8.18. **Ž** Enckeov komet ima $a = 2,22$ AJ i perihel 0,336 AJ. Koliki mu je ekscentricitet i pripada li Jupiterovoj obitelji?
- 8.19. **Ž** Zašto meteoroid koji Zemlju sustiže straga ulazi u atmosferu sporije od onoga koji joj dolazi ususret?
- 8.20. **Ž** Objasnite zašto se ista pomrčina Sunca ne vidi s istog mjesta na Zemlji nakon jednog Sarosa.
- 8.21. **D** Odredite veliku poluos rezonancije 4:1 s Jupiterom i objasnite zašto ondje nema izrazite pukotine iako rezonancija postoji.
- 8.22. **D** Meteoroid ima heliocentričnu brzinu 42,1 km/s na Zemljinoj stazi. Kolika mu je brzina ulaska u atmosferu ako Zemlji dolazi *ususret*, a kolika ako je sustiže straga? Uzmite u obzir i ubrzanje Zemljinom gravitacijom (11,2 km/s).
- 8.23. **D** Koliki bi bio ophodni period tijela na vanjskom rubu Oortova oblaka, na 10^5 AJ?
- 8.24. **D** Procijenite prosječni razmak između tijela u Oortovu oblaku ako ih ima 10^{12} i raspoređeni su unutar kugle polumjera 10^5 AJ.
- 8.25. **D** Kometova koma ima promjer 10^8 m, a komet je na 1 AJ od Zemlje. Koliki joj je kutni promjer? Usporedite s kutnim promjerom Mjeseca.

9. Sunce i izvori zvjezdane energije

O ovoj temi

Pitanje odakle Suncu energija bilo je jedno od najvećih otvorenih pitanja 19. stoljeća, i put do odgovora dobar je primjer kako fizika napreduje isključivanjem. Kemijsko gorenje daje desetak tisuća godina, gravitacijska kontrakcija tridesetak milijuna — a geolozi su iz slojeva stijena već tada znali da je Zemlja starija. Sukob je razriješen tek s $E = mc^2$.

Fuzija vodika pretvara u energiju svega 0,7 % mase, ali to je milijun puta više od kemijskih veza i posve dovoljno za deset milijardi godina. Iz tog jednog podatka slijedi gotovo sav računski dio poglavlja: gubitak mase u sekundi, broj jezgara helija koje nastanu, ukupni vijek Sunca i koliko je mase dosad prerađeno.

Drugi dio bavi se građom i aktivnošću. Sunce je jedina zvijezda koju vidimo kao plohu, pa se na njemu mogu pratiti pojave koje kod drugih zvijezda samo naslućujemo — granulacija, pjege, ciklus od jedanaest godina, prominencije i izbačaji mase. Uz to ide i **sigurnosna napomena** koja se ne smije preskočiti: Sunce se nikada ne promatra bez ispravnog filtra na objektivu ili projekcijom.

Zadatci o Sunčevoj aktivnosti povezuju teoriju s onim što se doista može opaziti sa školskog dvorišta. Wolfov broj je mjera koju su amateri bilježili više od stoljeća i koja i danas ulazi u znanstvene baze, a praćenje pjega kroz nekoliko tjedana daje i period rotacije Sunca.

Što poglavlje pokriva

- solarna konstanta i luminozitet
- defekt mase i energija fuzije
- vijek Sunca i Kelvin-Helmholtzovo vrijeme
- slojevita građa i prijenos energije
- pjege, Wolfov broj i ciklus aktivnosti

Pregled jednadžbi

$L = 4\pi d^2 S$	luminozitet iz solarne konstante
$S(d) = \frac{S_{\oplus}}{d[\text{AJ}]^2}$	osvjetljenje na udaljenosti d
$\frac{dm}{dt} = \frac{L}{c^2}$	gubitak mase zračenjem
$t_{KH} \approx \frac{GM^2}{RL}$	Kelvin-Helmholtzovo vrijeme
$4\ ^1\text{H} \rightarrow\ ^4\text{He} + 26,7\ \text{MeV}$	fuzija, učinkovitost 0,7 %
$t = \frac{f M \eta c^2}{L}$	vijek na glavnom nizu
$\varepsilon_{pp} \propto T^4, \quad \varepsilon_{CNO} \propto T^{18}$	ovisnost o temperaturi
$R = k(10g + f)$	Wolfov broj

S solarna konstanta, 1361 W/m²

η učinkovitost pretvorbe mase u energiju

f udio mase koji sudjeluje u fuziji (za Sunce oko 0,1)

g broj skupina pjega

Podatci o Suncu: $M_{\odot} = 1,989 \times 10^{30}$ kg, $R_{\odot} = 6,957 \times 10^8$ m, $L_{\odot} = 3,828 \times 10^{26}$ W, $T_{\text{pov}} = 5772$ K, $T_{\text{jezgra}} = 1,57 \times 10^7$ K, $\rho_{\text{jezgra}} = 1,5 \times 10^5$ kg/m³.

Najčešće pogreške. Uvrštavanje mase cijelog Sunca umjesto one koja doista prolazi kroz jezgru pri računanju vijeka; miješanje energije po reakciji s energijom po nukleonu; i zaključak da su pjege hladne u apsolutnom smislu — one su hladnije samo u odnosu na okolinu.

- 9.1. **Š** Koliko energije u sekundi izrači jedan kvadratni metar Sunčeve površine?
- 9.2. **Š** Kolika je solarna konstanta na Marsu (1,524 AJ)?
- 9.3. **Š** Koliko dugo svjetlost putuje od Sunca do Zemlje?
- 9.4. **Š** Koliko mase Sunce izgubi u jednoj sekundi zbog zračenja? Izrazite odgovor i u milijunima tona.
- 9.5. **Š** Zašto Sunčeve pjegice izgledaju tamno iako su vrele?
- 9.6. **Š** Poredajte slojeve Sunca od središta prema van i navedite način prijenosa energije u svakome.
- 9.7. **Š** Koliko traje ciklus Sunčevih pjega i zašto se kaže da je pravi ciklus dvostruko dulji?
- 9.8. **Š** Koja je razlika između prominencije i bljeska?
- 9.9. **Š** Zašto se korona može vidjeti golim okom samo tijekom potpune pomrčine Sunca?
- 9.10. **Š** Kolika je solarna konstanta na Jupiteru (5,204 AJ)?
- 9.11. **Ž** Koliko jezgara helija nastane u Suncu svake sekunde? ($1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$)
- 9.12. **Ž** Koliki je dio svoje ukupne mase Sunce izgubilo zračenjem tijekom 4,6 milijardi godina?
- 9.13. **Ž** Sunčeva pjega ima temperaturu 4200 K. Koliko puta slabije zrači po kvadratnom metru od okolne fotosfere?
- 9.14. **Ž** Kroz svaki kvadratni centimetar Zemljine površine prođe $6,5 \times 10^{10}$ solarnih neutrina u sekundi. Koliko ih prođe kroz kvadratni metar?
- 9.15. **Ž** Koliko vodika Sunce pretvori u helij tijekom jedne godine? Izrazite to i kao udio Sunčeve mase.
- 9.16. **Ž** Opažač je izbrojio 4 skupine pjega i ukupno 23 pojedinačne pjegice. Koliki je Wolfov broj, uz $k = 1$?
- 9.17. **Ž** Zašto proton-protonski lanac prevladava u Suncu, a CNO-ciklus u zvijezdama masivnijima od oko $1,3 M_{\odot}$?
- 9.18. **Ž** Objasnite zašto se energija fotonu treba stotinu tisuća godina da izađe iz Sunca, a neutrinu svega dvije sekunde.
- 9.19. **Ž** Koliko bi Sunce trajalo kad bi cijelu svoju masu moglo pretvoriti u energiju uz učinkovitost 0,7%?
- 9.20. **Ž** Zašto Sunčev vjetar ne oduva Zemljinu atmosferu?
- 9.21. **D** Izračunajte Kelvin-Helmholtzovo vrijeme Sunca i objasnite zašto je podatak o dobi Zemlje bio presudan u odbacivanju gravitacijske kontrakcije.
- 9.22. **D** Zvijezda ima masu $2 M_{\odot}$. Procijenite joj luminozitet iz odnosa mase i sjaja te vijek na glavnom nizu.
- 9.23. **D** Gustoća Sunčeve jezgre iznosi $1,5 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$. Koliko je to puta više od gustoće vode i zašto tvar ondje ipak nije čvrsta?
- 9.24. **D** Procijenite koliko bi Sunce trajalo kad bi jedini izvor energije bila gravitacijska kontrakcija, a Sunce bi se pritom stisnulo na polovicu današnjeg polumjera.
- 9.25. **D** Zašto se u jezgri Sunca odvija fuzija iako je toplinska energija protona mnogo manja od Coulombove barijere?

10. Fotometrija, spektroskopija i HR-dijagram

O ovoj temi

Ovo je poglavlje spojnica cijele zbirke. Fotometrija daje sjaj, spektroskopija temperaturu i sastav, a njihov spoj — **Hertzsprung-Russellov dijagram** — pokazuje da zvijezde nisu razasute nasumično, nego se zbijaju u uske pojaseve. Ta jedna slika sadrži teoriju zvjezdane evolucije prije nego što je ijedan model napisan.

Alati su jednostavni, ali ih treba znati kombinirati. Modul udaljenosti povezuje prividnu i apsolutnu magnitudu, indeks boje daje temperaturu, a Stefan-Boltzmannov zakon iz luminoziteta i temperature izvlači polumjer. Zato se položaj zvijezde u dijagramu može čitati unatrag: znajući gdje leži, znamo koliko je velika, koliko teška i koliko će još dugo trajati.

Posljednji dio poglavlja svodi sve na jedan parametar. Za zvijezde glavnog niza vrijedi $L \propto M^{3,5}$, a odatle $t \propto M^{-2,5}$ — masa određuje luminozitet, temperaturu, polumjer i vijek. Zadaci koji traže dob kuglastog skupa iz točke skretanja izravno su primjena te veze i ujedno najizravnija metoda datiranja u astronomiji.

Što poglavlje pokriva

- osvjetljenje, magnitude i modul udaljenosti
- indeks boje i spektralne klase O B A F G K M
- klase sjaja i širina spektralnih linija
- HR-dijagram i određivanje polumjera
- odnos mase i sjaja te vijek na glavnom nizu

Pregled jednadžbi

$E = \frac{L}{4\pi d^2}$	osvjetljenje
$m - M = 5 \log d [\text{pc}] - 5 + A$	modul udaljenosti
$M = M_{\odot} - 2,5 \log \frac{L}{L_{\odot}}$	apsolutna magnituda iz luminoziteta
$M_{\text{bol}} = M_V + BC$	bolometrijska magnituda
$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{T_{\odot}}{T}\right)^2 \sqrt{\frac{L}{L_{\odot}}}$	polumjer iz položaja u HR-dijagramu
$T \approx 4600 \left(\frac{1}{0,92(B-V) + 1,70} + \frac{1}{0,92(B-V) + 0,62} \right)$	temperatura iz indeksa boje
$\frac{L}{L_{\odot}} = \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{3,5}$	odnos mase i sjaja
$t \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^{-2,5} \text{ god}$	vijek na glavnom nizu
$A_V \approx 3,1 E(B-V)$	ekstinkcija iz crvenjenja

BC bolometrijska korekcija (uvijek negativna)

$E(B-V)$ crvenjenje, razlika izmjerenog i pravog indeksa boje

Za Sunce: $M_{\odot,V} = +4,83$, $M_{\odot,\text{bol}} = +4,74$, $T_{\odot} = 5772 \text{ K}$. Spektralne klase O B A F G K M idu od najtoplije prema najhladnijoj.

Najčešće pogreške. Zamjena M za masu i M za apsolutnu magnitudu u istom zadatku; ispuštanje ekstinkcije pri spektroskopskoj paralaksi; i uvrštavanje vizualne umjesto bolometrijske magnitude pri računanju ukupnog luminoziteta.

- 10.1. **Š** Zvijezda je dvostruko dalje od druge, a jednakog je luminoziteta. Koliko je puta slabije osvijetljenje daje?
- 10.2. **Š** Zvijezda ima $m = 3,5$ i $M = 3,5$. Kolika joj je udaljenost?
- 10.3. **Š** Sunce ima $M_V = +4,83$. Kolika mu je apsolutna magnituda ako $BC = -0,09$?
- 10.4. **Š** Poredajte spektralne klase od najtoplije prema najhladnijoj i navedite pripadne boje.
- 10.5. **Š** Zvijezda je klase K5III. Što svaki dio te oznake znači?
- 10.6. **Š** Zašto su vodikove linije najjače kod zvijezda klase A, a ne kod najtoplijih?
- 10.7. **Š** Gdje se u HR-dijagramu nalaze bijeli patuljci i zašto baš ondje?
- 10.8. **Š** Zvijezda ima $B - V = +1,5$. Je li vruća ili hladna?
- 10.9. **Š** Koji parametar zvijezde određuje gotovo sve ostalo ako je zvijezda na glavnom nizu?
- 10.10. **Š** Zašto je bolometrijska korekcija uvijek negativna?
- 10.11. **Ž** Zvijezda ima $m = 6,5$ i nalazi se na 120 pc. Kolika joj je apsolutna magnituda?
- 10.12. **Ž** Zvijezda ima $m = 11,2$ i $M = -1,8$. Kolika joj je udaljenost?
- 10.13. **Ž** Zvijezda ima $M = -2,3$. Koliko je puta luminoznija od Sunca?
- 10.14. **Ž** Zvijezda ima $L = 3000 L_\odot$ i $T = 4500$ K. Koliki joj je polumjer?
- 10.15. **Ž** Zvijezda ima indeks boje $B - V = +0,45$. Procijenite joj temperaturu i spektralnu klasu.
- 10.16. **Ž** Zvijezda ima masu $0,60 M_\odot$. Koliki joj je vijek na glavnom nizu?
- 10.17. **Ž** Koliki je luminozitet te zvijezde u Sunčevim jedinicama?
- 10.18. **Ž** Skup sadrži 10^4 zvijezda prosječne apsolutne magnitude $M = +5,5$. Kolika je apsolutna magnituda skupa?
- 10.19. **Ž** Zvijezda ima spektar klase A0V, dakle $M_V \approx +1,4$, a izmjerena joj je prividna magnituda $m = 14,8$. Kolika joj je udaljenost?
- 10.20. **Ž** Zvijezda ima izmjeren $B - V = +0,35$, a za njezinu spektralnu klasu pravi indeks iznosi 0,00. Kolika je ekstinkcija A_V ?
- 10.21. **D** Bijeli patuljak ima $L = 4,0 \times 10^{-4} L_\odot$ i $T = 11\,000$ K. Odredite mu polumjer i usporedite ga sa Zemljinim.
- 10.22. **D** Kuglasti skup ima točku skretanja pri dobi 12 milijardi godina. Kolika je masa zvijezda koje upravo napuštaju glavni niz?
- 10.23. **D** Za koliko se magnituda razlikuju dvije zvijezde jednakog luminoziteta ako je jedna dvostruko dalje?
- 10.24. **D** Zvijezda ima $M_V = +8,2$ i bolometrijsku korekciju $BC = -1,9$. Kolika joj je bolometrijska magnituda i koliko puta zrači slabije od Sunca ukupno?
- 10.25. **D** Deneb ima $M_{\text{bol}} \approx -8,4$. Koliko je puta luminozniji od Sunca?

11. Dvojne i promjenjive zvijezde, evolucija

O ovoj temi

Masa je jedini parametar zvijezde koji se ne može očitati iz njezine svjetlosti. Za nju treba nešto što zvijezda privlači — pa su **dvojne zvijezde** jedini izravan izvor podataka o masama, a sve tablice odnosa mase i sjaja u konačnici počivaju na njima.

Postoje tri načina da se dvojnost otkrije, a svaki daje drugi dio podataka. Vizualno dvojne daju stazu i omjer udaljenosti od centra mase; spektroskopski dvojne daju period i amplitude brzina, ali samo do na $\sin i$; pomrčinske daju polumjere i omjer temperatura, a usput rješavaju i problem nagiba, jer je kod njih $i \approx 90^\circ$. Najbolje izmjerene zvijezde one su koje su istodobno spektroskopski i pomrčinski dvojne.

Drugi dio poglavlja prati zvijezdu kroz život. Put od molekularnog oblaka do bijelog patuljka ili crne rupe određen je početnom masom, a promjenjive zvijezde — posebno kefeide — usput daju mjerilo za udaljenosti do drugih galaksija. Odnos period-luminozitet ovdje je jedina formula koju treba doslovno zapamtiti; sve ostalo slijedi iz Keplerovih zakona i Stefan-Boltzmannova zakona.

Završni dio poglavlja bavi se onim što od zvijezde ostane. Bijeli patuljak, neutronska zvijezda i crna rupa razlikuju se po tome koja ih sila drži na okupu, a granice između njih — Chandrasekharova na $1,44 M_\odot$ i ona oko dvije Sunčeve mase — odlučuju o ishodu. Zadatci ondje traže gustoće i brzine bijega koje izlaze iz svakodnevnog iskustva, pa je procjena reda veličine osobito korisna kao provjera.

Što poglavlje pokriva

- vizualno, spektroskopski i pomrčinski dvojne
- mjerenje masa i omjer masa iz krivulje brzina
- krivulja sjaja i omjer temperatura
- kefeide, RR Lyrae i odnos period-luminozitet
- završni stadiji i kompaktni objekti

Pregled jednadžbi

$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}$	ukupna masa (AJ, god, $M_\odot$)
$\frac{M_1}{M_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{K_2}{K_1}$	omjer masa
$a [\text{AJ}] = a'' \cdot d [\text{pc}]$	kutna poluos u AJ
$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4$	omjer dubina minimuma
$M_V = -2,81 \log P [\text{d}] - 1,43$	odnos period-luminozitet kefeida
$r_s = \frac{2GM}{c^2}$	Schwarzschildov polumjer
$t \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2,5} \text{ god}$	vijek na glavnom nizu

K amplituda radijalnih brzina

a_1, a_2 udaljenosti komponenata od centra mase

P period pulsiranja

Chandrasekharova granica: $1,44 M_\odot$. RR Lyrae imaju gotovo stalan $M_V \approx +0,6$. Supernove tipa Ia imaju $M \approx -19,3$. Neutronska zvijezda: $M \approx 1,4 M_\odot$, $R \approx 10 \text{ km}$.

Najčešće pogreške. Pripisivanje veće mase komponenti s većom amplitudom brzine (točno je obrnuto); zaboravljanje pretvorbe kutne poluosi u astronomske jedinice množenjem s udaljenošću u parsecima; i uvrštavanje perioda u godinama umjesto u danima u odnos period-luminozitet.

- 11.1. **Š** Zašto su dvojne zvijezde jedini izravan način mjerenja mase zvijezde?
- 11.2. **Š** Po čemu se razlikuju prividno dvojne i fizički dvojne zvijezde?
- 11.3. **Š** Koja komponenta dvojnog sustava opisuje veću stazu oko centra mase?
- 11.4. **Š** Zašto je primarni minimum pomrčinske dvojne dublji od sekundarnog?
- 11.5. **Š** Što je Chandrasekharova granica i za koji objekt vrijedi?
- 11.6. **Š** Nabrojite tri glavne skupine promjenjivih zvijezda i po čemu se razlikuju.
- 11.7. **Š** Zašto se kaže da su kefeide „standardne svijeće“?
- 11.8. **Š** Što ostaje nakon zvijezde od $2 M_{\odot}$, a što nakon zvijezde od $30 M_{\odot}$?
- 11.9. **Š** Zašto masivne zvijezde žive kraće iako imaju više goriva?
- 11.10. **Š** Što je Algolov paradoks?
- 11.11. **Ž** Vizualno dvojna ima $a = 30$ AJ i $T = 60$ godina. Kolika joj je ukupna masa?
- 11.12. **Ž** Vizualno dvojna ima kutnu veliku poluos $0,80''$ i nalazi se na 15 pc. Kolika joj je velika poluos u astronomskim jedinicama?
- 11.13. **Ž** Ista dvojna ima period 24 godine. Kolika joj je ukupna masa? Uzmite a iz prethodnog zadatka i zaokružite na 12 AJ.
- 11.14. **Ž** Kefeida ima period 30 dana i prividnu magnitudu $m = 14,0$. Odredite joj apsolutnu magnitudu i udaljenost.
- 11.15. **Ž** Dubine minimuma pomrčinske dvojne iznose 0,25 i 0,06 ukupnog sjaja. Koliki je omjer temperatura komponenata?
- 11.16. **Ž** Koliki je Schwarzschildov polumjer crne rupe od $20 M_{\odot}$?
- 11.17. **Ž** Kolika je srednja gustoća neutronske zvijezde od $1,4 M_{\odot}$ i polumjera 10 km?
- 11.18. **Ž** RR Lyrae zvijezda u kuglastom skupu ima $m = 16,5$. Kolika je udaljenost skupa?
- 11.19. **Ž** U spektroskopski dvojnjoj amplitude radijalnih brzina iznose $K_1 = 18$ km/s i $K_2 = 45$ km/s. Koliki je omjer masa i koja je komponenta teža?
- 11.20. **Ž** Zašto se iz spektroskopski dvojne bez pomrčina ne može odrediti prava masa, nego samo $M \sin^3 i$?
- 11.21. **D** Sirius A i B kruže s $a = 19,8$ AJ i $T = 50,1$ godina, a omjer udaljenosti od centra mase iznosi 2,2:1. Odredite pojedinačne mase.
- 11.22. **D** Bijeli patuljak ima $M = 1,0 M_{\odot}$ i $R = 0,01 R_{\odot}$. Kolika je gravitacijska akceleracija na njegovoj površini i koliko je puta veća od Zemljine?
- 11.23. **D** Kefeida ima apsolutnu magnitudu $M_V = -4,0$. Koliki joj je period pulsiranja?
- 11.24. **D** Supernova oslobodi oko 10^{46} J. Koliko bi godina Suncu trebalo da izrači jednaku energiju?
- 11.25. **D** Kolika je brzina bijega s površine neutronske zvijezde ($M = 1,4 M_{\odot}$, $R = 10$ km)? Izrazite je i kao dio brzine svjetlosti.

12. Skupovi, galaksije i kozmologija

O ovoj temi

Zadnje poglavlje teorijskog dijela vodi od zvjezdanih skupova do ruba vidljivog svemira, i pritom ponovno upotrebljava gotovo sve što je dotad izgrađeno. Skupovi daju dob, međuzvjezdana tvar daje ekstinkciju koju treba oduzeti, rotacijska krivulja Galaksije daje masu — i pritom otkriva da je najveći dio te mase nevidljiv.

Ljestvica udaljenosti je okosnica poglavlja i najbolji primjer kako astronomija gradi znanje. Paralaksa kalibrira kefeide, kefeide kalibriraju supernove tipa Ia, a supernove kalibriraju Hubbleov zakon. Svaka stepenica oslanja se na prethodnu, pa se pogreška na dnu prenosi do vrha — zato je misija Gaia, koja je popravila najnižu stepenicu, promijenila brojke sve do kozmoloških skala.

Kozmološki dio traži oprez u tumačenju. Crveni pomak dalekih galaksija ne potječe od gibanja kroz prostor nego od **širenja samog prostora**, Veliki prasak nije bio eksplozija na nekom mjestu nego nastanak prostora svugdje odjednom, a Hubbleovo vrijeme $1/H_0$ tek je gruba procjena dobi svemira. Računi su jednostavni; teže je izbjeći slike koje navode na krivi zaključak.

Posljednja skupina zadataka bavi se ranim svemirom. Temperatura pozadinskog zračenja pada obrnuto s faktorom širenja, pa se iz jednog crvenog pomaka može rekonstruirati kakav je svemir bio u tom trenutku — koliko je bio topao i gdje mu je bio maksimum zračenja. Rekombinacija na $z \approx 1100$ pritom je granica iza koje jednostavno nema što vidjeti, jer je svemir do tada bio neproziran.

Što poglavlje pokriva

- otvoreni i kuglasti skupovi, dob iz točke skretanja
- međuzvjezdana tvar, maglice i ekstinkcija
- građa Mliječne staze i rotacijska krivulja
- klasifikacija galaksija i ljestvica udaljenosti
- Hubbleov zakon, pozadinsko zračenje i sastav svemira

Pregled jednadžbi

$t \approx 10^{10} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{-2,5}$ god	dob skupa iz točke skretanja
$A_V \approx 3,1 E(B - V)$	ekstinkcija iz crvenjenja
$M = \frac{v^2 r}{G}$	masa unutar polumjera r iz rotacijske krivulje
$v = H_0 d$	Hubbleov zakon
$t_H = \frac{1}{H_0}$	Hubbleovo vrijeme
$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$	crveni pomak
$T(z) = T_0(1 + z)$	temperatura pozadinskog zračenja
$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$	kritična gustoća
H_0	Hubbleova konstanta, 70 km/s/Mpc
T_0	današnja temperatura CMB-a, 2,725 K
ρ_c	kritična gustoća svemira

Korisno: 1 Mpc = $3,086 \times 10^{19}$ km; dob svemira 13,8 mlrd godina; sastav svemira: 5 % obična tvar, 27 % tamna tvar, 68 % tamna energija.

Najčešće pogreške. Primjena klasične veze $v = zc$ pri $z \geq 0,1$; miješanje megaparseka i kiloparseka pri uvrštavanju u Hubbleov zakon; i zaključak da postoji središte širenja jer se sve od nas udaljava.

- 12.1. **Š** Po čemu se otvoreni skup razlikuje od kuglastog po broju zvijezda, dobi i položaju u Galaksiji?
- 12.2. **Š** Što je točka skretanja i što nam oduje?
- 12.3. **Š** Zašto su zvijezde populacije II siromašne metalima?
- 12.4. **Š** Nabrojite tri vrste maglica i navedite primjer za svaku.
- 12.5. **Š** Zašto je linija od 21 cm toliko važna za proučavanje Galaksije?
- 12.6. **Š** Kojem tipu po Hubbleovoj klasifikaciji pripada Mliječna staza?
- 12.7. **Š** Koliko je Sunce udaljeno od središta Galaksije i koliko mu treba za jedan ophod?
- 12.8. **Š** Zašto redoslijed u Hubbleovoj klasifikaciji nije evolucijski?
- 12.9. **Š** Što je Olbersov paradoks i kako se razrješava?
- 12.10. **Š** Navedite tri glavna opažacka dokaza za Veliki prasak.
- 12.11. **Ž** Galaksija je udaljena 85 Mpc. Kolika joj je brzina udaljavanja?
- 12.12. **Ž** Galaksija se udaljava brzinom 12 000 km/s. Kolika joj je udaljenost?
- 12.13. **Ž** Kuglasti skup ima točku skretanja pri masi $0,85 M_{\odot}$. Kolika mu je dob?
- 12.14. **Ž** U spektru galaksije linija $H\alpha$ (656,3 nm) izmjerena je na 658,9 nm. Odredite z , brzinu i udaljenost.
- 12.15. **Ž** Zvijezde na 15 kpc od središta Galaksije kruže brzinom 220 km/s. Kolika je masa unutar te staze?
- 12.16. **Ž** Izračunajte Hubbleovo vrijeme u milijardama godina.
- 12.17. **Ž** Kolika je bila temperatura pozadinskog zračenja pri $z = 10$, kad su nastajale prve galaksije?
- 12.18. **Ž** Zvijezda u smjeru središta Galaksije ima crvenjenje $E(B - V) = 0,60$. Kolika je ekstinkcija A_V ?
- 12.19. **Ž** Zašto se pri mjerenju udaljenosti galaksija ne može upotrijebiti trigonometrijska paralaksa?
- 12.20. **Ž** Objasnite zašto svaki opažatelj u svemiru vidi da se sve galaksije udaljavaju od njega.
- 12.21. **D** Galaksija ima $z = 1,00$. Odredite joj brzinu udaljavanja relativistički i usporedite s nerelativističkim rezultatom.
- 12.22. **D** Izračunajte kritičnu gustoću svemira uz $H_0 = 70$ km/s/Mpc. Koliko je to protona po kubičnom metru?
- 12.23. **D** Zvijezde na 30 kpc od središta neke galaksije kruže brzinom 250 km/s. Kolika je masa unutar te staze i što iz toga slijedi ako se u tom području vidi vrlo malo zvijezda?
- 12.24. **D** Kvazar ima $z = 6,0$. Kolika je bila temperatura pozadinskog zračenja u trenutku kad je svjetlost krenula, i na kojoj valnoj duljini je tada bio maksimum tog zračenja?
- 12.25. **D** Na kojoj valnoj duljini danas leži maksimum mikrovalnog pozadinskog zračenja? U kojem je to području spektra?

13. Sferna astronomija i računske tehnike

O ovoj temi

Ovo poglavlje ne donosi nove pojave nego **alat**. Sferna trigonometrija je mašinerija kojom se rješava svaki zadatak o položaju na nebu, a tri poučka koja je čine — kosinusni, sinusni i kotangensni — pokrivaju sve kombinacije zadanih i traženih elemenata. Umijeće je u tome da se odabere onaj koji daje jednoznačan odgovor, a ne onaj koji prvi padne na pamet.

Drugi dio bavi se pojavama koje traže baš tu preciznost: izlazak i zalazak uz refrakciju, trajanje triju sumraka, uvjet za bijele noći, geometrija pomrčina i Saros. Ondje se vidi zašto sitnice nisu sitnice — refrakcija na horizontu iznosi $34'$, dakle više od promjera Sunca, pa Sunce vidimo i kad je geometrijski već zašlo, a dan je zbog toga na ekvinocij dulji od dvanaest sati.

Treći dio je čisto računski: pretvorba datuma u julijanski datum, veza s zvjezdanim vremenom, pravilo malog kuta i propagacija mjernih pogrešaka. To su vještine koje ne donose bodove same po sebi, ali odlučuju hoće li zadatak biti riješen brzo i točno ili polako i krivo.

Iako se na prvi pogled čini da je riječ o pukoj matematici, upravo ovdje leži razlika između zadatka riješenog u pet minuta i onoga koji se vuče pola sata. Većina zadataka o položajima, izlascima i pomrčinama može se svesti na jedan od triju poučaka, uz uvjet da se ispravno prepozna koji su elementi trokuta zadani. Zato uz svaki zadatak vrijedi prvo skicirati trokut PZS i tek onda posegnuti za formulom.

Što poglavlje pokriva

- tri poučka sferne trigonometrije i izbor među njima
- izlazak i zalazak uz refrakciju
- sumraci i uvjet za bijele noći
- geometrija pomrčina i Saros
- julijanski datum, sunčani sat i propagacija pogrešaka

Pregled jednadžbi

$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$	sferni kosinusni poučak
$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$	sferni sinusni poučak
$\cos b \cos C = \sin b \cot a - \sin C \cot A$	kotangensni poučak
$\cos H_0 = \frac{\sin h_0 - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}$	satni kut pri visini h_0
$\varphi > 72^\circ - \delta_\odot$	uvjet za izostanak astronomske noći
$\tan \theta = \sin \varphi \tan H$	satna crta vodoravnog sunčanog sata
$\frac{\Delta f}{f} = n \frac{\Delta x}{x}$	propagacija pogreške za $f = x^n$
$\frac{s}{d} = \frac{\theta''}{206\,265}$	pravilo malog kuta

a, b, c stranice sfernog trokuta (u stupnjevima)

A, B, C kutovi nasuprot tim stranicama

h_0 granična visina: $-34'$ zvijezda, $-50'$ Sunce, -6° , -12° , -18° sumraci

θ kut satne crte od podnevne linije

Saros = 6585,32 dana = 18 god 11 d 8 h. 1 rad = 206 265''.

Najčešće pogreške. Upotreba sinusnog poučka ondje gdje arcsin daje dva rješenja; zaboravljanje da julijanski dan počinje u podne; i zbrajanje relativnih pogrešaka linearno umjesto kvadratno kod umnožaka.

- 13.1. **Š** Koliko iznosi $1''$ u radijanima?
- 13.2. **Š** Koliki je zbroj kutova sfernog trokuta i kako se zove razlika u odnosu na 180° ?
- 13.3. **Š** Koje su tri stranice astronomskog trokuta PZS ?
- 13.4. **Š** Zašto je pri rješavanju sfernog trokuta bolje izbjegavati sinusni poučak?
- 13.5. **Š** Koju visinu h_0 treba uzeti za izlazak Sunca, a koju za izlazak zvijezde?
- 13.6. **Š** Do koje visine Sunca ispod horizonta traje nautički sumrak?
- 13.7. **Š** Koliko traje Saros i što se nakon njega ponavlja?
- 13.8. **Š** Zašto se pomrčine događaju samo u dvama razdobljima godišnje?
- 13.9. **Š** Koliko iznosi julijanski datum za J2000.0 i zašto ima decimalu ,0, a ne ,5?
- 13.10. **Š** Zvijezda ima paralaksu izmjerenu s relativnom pogreškom od 2%. Kolika je relativna pogreška udaljenosti?
- 13.11. **Ž** Koliko traje dan u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$) 15. lipnja, kad je $\delta_\odot = +23,1^\circ$? Uzmite refrakciju, $h_0 = -0^\circ 50'$.
- 13.12. **Ž** Koliko traje građanski sumrak u Zagrebu na dan ekvinocija?
- 13.13. **Ž** Izračunajte julijanski datum za 21. ožujka 2027. u 0^h UT.
- 13.14. **Ž** Koliku duljinu na udaljenosti od jedne astronomske jedinice odgovara kut od $1''$?
- 13.15. **Ž** Odredite kutnu udaljenost između Vege ($\alpha = 18^h 36,9^m$, $\delta = +38,78^\circ$) i Deneba ($\alpha = 20^h 41,4^m$, $\delta = +45,28^\circ$).
- 13.16. **Ž** Koliki je kut satne crte za 14^h na vodoravnom sunčanom satu u Zagrebu ($\varphi = 45,8^\circ$)?
- 13.17. **Ž** Od koje je geografske širine izostavljen i *nautički* sumrak na ljetni suncostaj?
- 13.18. **Ž** Koliki je azimut zalaska Sunca u Puli ($\varphi = 44,87^\circ$) na ljetni suncostaj, mjeren od sjevera?
- 13.19. **Ž** Zvijezda ima $h = 25^\circ$. Kolika je zračna masa kroz koju je promatramo, ako je $X \approx 1/\sin h$?
- 13.20. **Ž** Zašto se dan na ekvinocij ne dijeli točno na dvanaest sati dana i dvanaest sati noći?
- 13.21. **D** Veličina se računa kao $f = x^2 y^{-1}$. Relativne pogreške iznose $\Delta x/x = 3\%$ i $\Delta y/y = 5\%$. Kolika je relativna pogreška od f ?
- 13.22. **D** Koliko refrakcija produljuje dan na ljetni suncostaj za $\varphi = 60^\circ$?
- 13.23. **D** Izvedite uvjet za izostanak astronomske noći, $\varphi > 72^\circ - \delta_\odot$, polazeći od visine Sunca u donjoj kulminaciji.
- 13.24. **D** Pokažite da na ekvatoru vodoravni sunčani sat ne radi, i objasnite kakav se sat ondje koristi.
- 13.25. **D** Kutni promjer Sunca mijenja se tijekom godine od $31,5'$ do $32,5'$. Koliki je ekscentricitet Zemljine staze?

14. Egzoplaneti i astrobiologija

O ovoj temi

Godine 1995. nije bio poznat nijedan planet oko druge zvijezde slične Suncu. Danas ih je potvrđeno gotovo šest tisuća, a područje se razvija toliko brzo da svaki broj u ovom poglavlju treba shvatiti kao trenutačno stanje, a ne konačan podatak.

Računski je dio iznenađujuće pristupačan i oslanja se na alate iz ranijih poglavlja. Dubina tranzita daje omjer polumjera, amplituda radijalnih brzina daje masu, a zajedno daju gustoću — jedini podatak koji razlikuje stjenoviti svijet od plinovitog. Nastanjiva zona računa se iz luminoziteta zvijezde, a ravnotežna temperatura planeta iz iste formule koja je u sedmom poglavlju primijenjena na Mars.

Ono što ovo poglavlje čini posebnim jest **pristranost metoda**. Raspodjela otkrivenih planeta nije raspodjela stvarnih planeta, nego otisak osjetljivosti instrumenata: vjerojatnost tranzita je R_*/a , pa bliski planeti imaju mnogo veće izgleda da budu viđeni. Nekoliko zadataka izravno mjeri tu pristranost, a odgovor objašnjava zašto su rani katalozi bili puni vrućih Jupitera.

Zadnji dio poglavlja prelazi s računa na procjenu. Drakeova jednadžba nije predviđanje nego uredno posložen popis onoga što ne znamo, a njezina osjetljivost na posljednji član pokazuje koliko je zaključak nesiguran — promjena vijeka civilizacije za dva reda veličine mijenja rezultat jednako toliko. Zadatci te vrste ne traže točan broj nego sposobnost da se obrazloži koliko mu se može vjerovati.

Što poglavlje pokriva

- metode detekcije i njihove pristranosti
- dubina tranzita i vjerojatnost tranzita
- amplituda radijalnih brzina i masa planeta
- gustoća, vrste planeta i nastanjiva zona
- ravnotežna temperatura i Drakeova jednadžba

Pregled jednadžbi

$$\frac{\Delta F}{F} = \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2$$

dubina tranzita

$$p = \frac{R_*}{a}$$

vjerojatnost tranzita

$$K \approx 28,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{M_p \sin i}{M_J} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)^{-2/3} \left(\frac{P}{\text{god}} \right)^{-1/3}$$

amplituda radijalnih brzina

$$d_{\text{unut}} \approx 0,95 \sqrt{L/L_\odot}, \quad d_{\text{vanj}} \approx 1,37 \sqrt{L/L_\odot}$$

granice nastanjive zone [AJ]

$$T_{\text{eq}} = T_* \sqrt{\frac{R_*}{2a}} (1 - A)^{1/4}$$

ravnotežna temperatura planeta

$$t_{\text{tr}} \approx \frac{P}{\pi} \cdot \frac{R_*}{a}$$

trajanje središnjeg tranzita

$$N = R_* f_p n_e f_l f_i f_c L$$

Drakeova jednadžba

R_p, R_* polumjeri planeta i zvijezde

a velika poluos staze planeta

i nagib staze prema kartinoj ravnini

A albedo planeta

Korisno: $R_J = 69\,911 \text{ km} = 11,21 R_\oplus$; $M_J = 318 M_\oplus$; $R_\odot = 696\,000 \text{ km} = 109 R_\oplus$; $R_\oplus = 6371 \text{ km}$.

Najčešće pogreške. Uvrštavanje perioda u danima umjesto u godinama u formulu za amplitudu radijalnih brzina; miješanje Jupiterovih i Zemljinih polumjera pri izražavanju rezultata; i zaključivanje o sastavu planeta iz polumjera bez poznate mase.

- 14.1. **Š** Koje su tri glavne metode otkrivanja egzoplaneta i što svaka izravno mjeri?
- 14.2. **Š** Zašto je tek kombinacija tranzita i radijalnih brzina dovoljna da se odredi je li planet stjenovit?
- 14.3. **Š** Što je vrući Jupiter i zašto takav planet nije mogao nastati ondje gdje ga danas nalazimo?
- 14.4. **Š** Koliko iznosi dubina tranzita planeta polumjera $1 R_J$ ispred zvijezde polumjera $1 R_\odot$?
- 14.5. **Š** Zašto metoda radijalnih brzina daje samo donju granicu mase planeta?
- 14.6. **Š** Što je nastanjiva zona i o čemu ovisi njezin položaj?
- 14.7. **Š** Zašto se planeti oko crvenih patuljaka lakše otkrivaju tranzitnom metodom nego oni oko zvijezda poput Sunca?
- 14.8. **Š** Što je plimno zaključavanje i zašto je problem za nastanjivost?
- 14.9. **Š** Koji su članovi Drakeove jednadžbe danas poznati, a koji su i dalje pretpostavka?
- 14.10. **Š** Što je Fermijev paradoks?
- 14.11. **Ž** Tranzit ima dubinu 0,40 %, a zvijezda polumjer $1,0 R_\odot$. Koliki je polumjer planeta u Zemljinim polumjerima?
- 14.12. **Ž** Planet mase $0,50 M_J$ kruži oko zvijezde od $1,0 M_\odot$ s periodom 11 dana. Kolika je amplituda radijalnih brzina?
- 14.13. **Ž** Zvijezda ima $L = 0,040 L_\odot$. Gdje su granice njezine nastanjive zone?
- 14.14. **Ž** Kolika je vjerojatnost da planet na 0,10 AJ oko zvijezde polumjera $1 R_\odot$ bude viđen kao tranzitni?
- 14.15. **Ž** Superzemlja ima masu $5,0 M_\oplus$ i polumjer $1,6 R_\oplus$. Kolika joj je srednja gustoća i je li stjenovita?
- 14.16. **Ž** Planet kruži oko zvijezde slične Suncu na 0,50 AJ. Kolika mu je ravnotežna temperatura uz albedo 0,30?
- 14.17. **Ž** Kolika bi bila dubina tranzita kad bi Saturn ($R = 58\,232$ km) prešao ispred Sunca? Bi li je današnji svemirski teleskopi mogli izmjeriti?
- 14.18. **Ž** Kolika je amplituda radijalnih brzina koju Neptun ($M = 1,02 \times 10^{26}$ kg, $P = 164,8$ god) izaziva Suncu? Usporedite s današnjom granicom mjerljivosti od 10 cm/s.
- 14.19. **Ž** Zvijezda ima $L = 0,0080 L_\odot$ i masu $0,25 M_\odot$. Koliki je ophodni period planeta na unutarnjem rubu njezine nastanjive zone?
- 14.20. **Ž** Zašto se u katalogima egzoplaneta pojavljuje mnogo više planeta s kratkim periodima nego s dugima, iako u prirodi vjerojatno nije tako?
- 14.21. **D** Tranzit ima dubinu 0,020 %, a zvijezda polumjer $1,2 R_\odot$. Koliki je polumjer planeta i kakav je to svijet?
- 14.22. **D** Planet ima masu $5,0 M_\oplus$ i polumjer $1,5 R_\oplus$. Kolika mu je gustoća i kolika gravitacijska akceleracija na površini?
- 14.23. **D** Planet TRAPPIST-1e kruži na 0,029 AJ oko zvijezde s $T_\star = 2560$ K i $R_\star = 0,117 R_\odot$. Odredite mu ravnotežnu temperaturu uz albedo 0,30 i prosudite je li u nastanjivoj zoni.
- 14.24. **D** U Drakeovu jednadžbu uvrstite $R_\star = 2$ zvijezde godišnje, $f_p = 1,0$, $n_e = 0,20$, $f_l = 0,50$, $f_i = 0,10$, $f_c = 0,10$ i $L = 10^4$ godina. Koliko civilizacija predviđa taj račun?
- 14.25. **D** Planet s periodom 3,0 dana kruži na 0,040 AJ oko zvijezde polumjera $1 R_\odot$. Koliko traje

njegov središnji tranzit?

15. Relativistička i visokoenergetska astrofizika

O ovoj temi

Newtonova gravitacija odlična je aproksimacija svugdje gdje je r_s/r vrlo malen — dakle gotovo posvuda. Ovo poglavlje bavi se onim rijetkim mjestima gdje to ne vrijedi: okolinom crnih rupa i neutronske zvijezde, te mjerenjima toliko preciznima da se odstupanja vide i u Sunčevu sustavu.

Klasične provjere opće teorije relativnosti iznose $43''$ po stoljeću za Merkurov perihel i $1,75''$ za odklon zrake uz rub Sunca. Ta je druga brojka bila presudna: newtonovski račun daje točno polovicu, pa je mjerenje iz 1919. moglo razlikovati *koja* je teorija točna. Danas se ista fizika koristi svakodnevno — bez relativističke korekcije od $38 \mu s$ dnevno GPS bi promašivao deset kilometara na dan.

Središnji pojam poglavlja je **Schwarzschildov polumjer**. Iz njega slijede horizont, fotonska sfera i najmanja stabilna kružna staza, a odatle i akrecija kao najučinkovitiji poznati izvor energije — do pedeset puta bolji od fuzije. Zadatci pokrivaju i kompaktne objekte i gravitacijske valove, ali sve se u konačnici svodi na taj jedan izraz.

Poglavlje zaokružuje astronomija s više glasnika. Osim elektromagnetskog zračenja, svemir nam danas šalje i gravitacijske valove, neutrine i kozmičke zrake, a svaki od tih kanala nosi podatke koje ostali ne mogu dati. Spajanje neutronske zvijezde zabilježeno 2017. prvi je put povezalo tri od tih kanala u jednom događaju i usput riješilo pitanje odakle u svemiru zlato.

Što poglavlje pokriva

- provjere opće teorije relativnosti
- gravitacijsko lećenje i mjerenje tamne tvari
- Schwarzschildov polumjer, horizont i ISCO
- akrecija i Eddingtonov luminozitet
- pulsari, bljeskovi gama-zračenja i gravitacijski valovi

Pregled jednadžbi

$r_s = \frac{2GM}{c^2}$	Schwarzschildov polumjer
$\theta = \frac{4GM}{c^2 b}$	otklon svjetlosne zrake
$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{GM}{Rc^2} = \frac{r_s}{2R}$	gravitacijski crveni pomak
$r_{\text{foton}} = 1,5 r_s, \quad r_{\text{ISCO}} = 3 r_s$	fotonska sfera i najmanja stabilna staza
$L = \eta \dot{M} c^2$	luminozitet akrecije
$L_{\text{Edd}} \approx 1,26 \times 10^{31} \frac{M}{M_\odot} \text{ W}$	Eddingtonov luminozitet
$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi r_s^3}$	srednja gustoća unutar horizonta
b najmanja udaljenost zrake od središta mase	
η učinkovitost akrecije: 0,06 (Schwarzschild) do 0,42 (Kerr)	
$\dot{M}$ brzina dotoka mase	

Korisno: za Sunce $r_s = 2,95 \text{ km}$; odklon uz rub Sunca $1,75''$; pomak Merkurova perihela $43''$ po stoljeću; $M_\odot c^2 = 1,79 \times 10^{47} \text{ J}$.

Najčešće pogreške. Miješanje polumjera horizonta s polumjerom najmanje stabilne staze ($3r_s$); pretpostavka da je crna rupa nužno gušća od neutronske zvijezde; i primjena newtonovske brzine bijega ondje gdje rezultat prelazi c .

- 15.1. **Š** Što tvrdi načelo ekvivalencije?
- 15.2. **Š** Koliko iznosi Schwarzschildov polumjer Sunca?
- 15.3. **Š** Zašto se kaže da crna rupa nema površinu u uobičajenom smislu?
- 15.4. **Š** Koja tri broja potpuno opisuju crnu rupu?
- 15.5. **Š** Što je ergosfera i kod kakvih se crnih rupa javlja?
- 15.6. **Š** Zašto je akrecija učinkovitiji izvor energije od nuklearne fuzije?
- 15.7. **Š** Koja je razlika između jakog, slabog i mikrolećenja?
- 15.8. **Š** Zašto je slabo gravitacijsko lećenje najizravniji način vaganja tamne tvari?
- 15.9. **Š** Zašto pulsar pulsira?
- 15.10. **Š** Po čemu se magnetar razlikuje od običnog pulsara?
- 15.11. **Ž** Koliki je Schwarzschildov polumjer crne rupe Sgr A* ($4,3 \times 10^6 M_{\odot}$)? Izrazite ga i u astronomskim jedinicama.
- 15.12. **Ž** Koliki je Eddingtonov luminozitet crne rupe od $10 M_{\odot}$? Izrazite ga u Sunčevim luminozitetima.
- 15.13. **Ž** Na kojoj se udaljenosti od Sgr A* nalazi najmanja stabilna kružna staza?
- 15.14. **Ž** Odredite gravitacijski crveni pomak svjetlosti koja napušta bijelog patuljka ($M = 1,0 M_{\odot}$, $R = 0,010 R_{\odot}$) i izrazite ga kao ekvivalentnu brzinu.
- 15.15. **Ž** Aktivna jezgra ima luminozitet 10^{38} W. Koliko mase godišnje mora gutati uz $\eta = 0,10$?
- 15.16. **Ž** Koliki je odklon svjetlosne zrake koja prolazi tik uz rub Jupitera? ($M = 1,898 \times 10^{27}$ kg, $R = 6,99 \times 10^7$ m)
- 15.17. **Ž** Koliki je Schwarzschildov polumjer Zemlje? Izrazite ga u milimetrima.
- 15.18. **Ž** Zašto se GPS-sateliti moraju korigirati za relativističke učinke?
- 15.19. **Ž** Po čemu se razlikuju kratki i dugi bljeskovi gama-zračenja i koji su im uzroci?
- 15.20. **Ž** Zašto kozmičke zrake ne pokazuju odakle su došle, a neutrini pokazuju?
- 15.21. **D** Kolika je srednja gustoća crne rupe od $10 M_{\odot}$, računata unutar horizonta? Usporedite je s gustoćom neutronske zvijezde.
- 15.22. **D** Koliko traje jedan ophod po najmanjoj stabilnoj kružnoj stazi oko crne rupe od $10 M_{\odot}$? Uzmite $r_{\text{ISCO}} = 3 r_s$ i newtonovsku aproksimaciju za period.
- 15.23. **D** Pri spajanju dviju crnih rupa u gravitacijske se valove pretvorilo $3,0 M_{\odot}$. Koliko je to energije i koliko puta više od one koju Sunce izrači u cijelom svom životu ($\approx 10^{44}$ J)?
- 15.24. **D** Milisekundni pulsar ima period 1,4 ms i polumjer 10 km. Kolika je brzina na njegovu ekvatoru i koliki je to dio brzine svjetlosti?
- 15.25. **D** Bljesak gama-zračenja oslobodi 10^{45} J u nekoliko sekundi. Koliko bi godina Suncu trebalo da izrači jednaku energiju?

16. Praktikum: opažanje, mjerenje i obrada podataka

O ovoj temi

Petnaest poglavlja bavilo se time *što* znamo o svemiru. Ovo se bavi time *kako* se do toga dolazi — i, važnije, kako to možete sami. Svi zadatci ovdje odnose se na postupke koji se izvode s opremom kakvu ima prosječno astronomsko društvo.

Okosnica je omjer signala i šuma. Iz njega slijedi nesigurnost magnitude, a odatle odgovor na jedino pitanje koje pri planiranju opažanja doista treba postaviti: koliko dugo snimati. Pravilo $S/N \propto \sqrt{t}$ nemilosrdno je — za dvostruko bolji rezultat treba četverostruko vrijeme — ali barem je predvidivo.

Drugi dio pokriva kalibraciju i **diferencijalnu fotometriju**. Bias, dark i flat uklanjaju tri različita nedostatka i ne mogu se međusobno zamijeniti, a mjerenje razlike prema stalnoj usporednoj zvijezdi poništava sve što jednako djeluje na obje — prozirnost, zračnu masu, tanku naoblaku. Provjerna zvijezda pri tome je jedina ugrađena kontrola: ako njezina krivulja nije ravna, nešto ne valja. Posljednja skupina zadataka vodi do trenutka minimuma i O–C dijagrama.

Što poglavlje pokriva

- planiranje opažanja, zračna masa i vidljivost
- omjer signala i šuma te izbor ekspozicije
- kalibracija: bias, dark i flat
- aperturna i diferencijalna fotometrija

Pregled jednadžbi

$\frac{S}{N} = \frac{S}{\sqrt{S + n_{px}(B + D + R^2)}}$	omjer signala i šuma
$\frac{S}{N} \propto \sqrt{t}$	ovisnost o ukupnom vremenu
$\sigma_m \approx \frac{1,0857}{S/N}$	nesigurnost magnitude
$\sigma_N = \frac{\sigma_1}{\sqrt{N}}$	slaganje N snimaka
$\text{skala} = \frac{206\,265''}{f [\text{mm}]}$	skala slike u ''/mm
$I = \frac{L - D}{F_{\text{norm}}}$	kalibracija snimke
$m_{\text{inst}} = -2,5 \log \frac{S}{t}$	instrumentalna magnituda
$m_{\text{var}} = m_{\text{usp,kat}} + \Delta m$	diferencijalna fotometrija
$X \approx \frac{1}{\sin h}$	zračna masa

S signal zvijezde u elektronima

B pozadina neba po pikselu

R šum očitavanja po pikselu

n_{px} broj piksela u aperturi

L, D, F sirova snimka, master dark i master flat

Heliocentrična korekcija doseže $\pm 8,3$ min; O–C je razlika opaženog i proračunatog trenutka.

Najčešće pogreške. Slaganje snimaka prije fotometrije, čime se gubi vremenski niz; preuska apertura, koja unosi više šuma nego što ga uklanja; i izostavljanje heliocentrične korekcije.

- 16.1. **Š** Zašto se kalibracijske snimke *dark* moraju snimati na istoj temperaturi i s istom duljinom ekspozicije kao i sama snimka?
- 16.2. **Š** Čemu služi *bias* i po čemu se razlikuje od *darka*?
- 16.3. **Š** Zašto se za fotometriju snimke *ne* slažu u jednu?
- 16.4. **Š** Što je provjerna zvijezda i kako se po njoj vidi da je obrada u redu?
- 16.5. **Š** Zašto usporedna zvijezda treba imati sličnu boju kao objekt?
- 16.6. **Š** Zašto se za fotometriju ne fokusira savršeno oštro?
- 16.7. **Š** Što je dithering i čemu služi?
- 16.8. **Š** Zašto se vremena opažanja bilježe u UTC-u, a ne po lokalnom satu?
- 16.9. **Š** Što znači pozitivan O–C i što bi sustavno rastući O–C značio?
- 16.10. **Š** Zašto se ne opaža ispod visine od otprilike 30° ?
- 16.11. **Ž** Zvijezda je izmjerena s $S/N = 250$. Kolika je nesigurnost magnitude?
- 16.12. **Ž** Ekspozicija od 45 s daje $S/N = 40$. Koliko ukupno treba snimati za $S/N = 120$?
- 16.13. **Ž** Teleskop ima $f = 750$ mm, a kamera piksel stranice $5,4 \mu\text{m}$. Kolika je skala slike po pikselu?
- 16.14. **Ž** Jedna snimka daje $S/N = 80$. Koliko ih treba složiti da se postigne $\sigma_m = 0,004$ mag?
- 16.15. **Ž** Zvijezda daje 60 000 e^- u aperturi od 80 piksela, nebo 150 e^- po pikselu, a šum očitavanja 9 e^- po pikselu. Koliki je S/N ?
- 16.16. **Ž** Instrumentalne magnitude iznose 13,204 za promjenjivu i 12,688 za usporednu zvijezdu. Usporedna ima kataloški $V = 11,350$. Kolika je magnituda promjenjive?
- 16.17. **Ž** Minimum je predviđen za JD 2 461 300,295, a opažen u JD 2 461 300,318. Koliki je O–C u minutama?
- 16.18. **Ž** Krivulja sjaja asteroida ponavlja isti uzorak svakih 3,7 sata. Koliki je rotacijski period?
- 16.19. **Ž** Objekt je na visini 35° . Kolika je zračna masa?
- 16.20. **Ž** Zašto se pri fotometriji apertura ne uzima što manja, iako bi tako ušlo manje šuma od neba?
- 16.21. **D** Koliki S/N treba da bi nesigurnost magnitude bila 0,012 mag?
- 16.22. **D** Želite izmjeriti tranzit dubine 1,2 % tako da svaka točka krivulje ima nesigurnost tri puta manju od dubine. Koliki S/N treba po snimci?
- 16.23. **D** Zašto je heliocentrična korekcija potrebna pri mjerenju minimuma promjenjivih zvijezda i koliko najviše iznosi?
- 16.24. **D** Jupiter ima kutni promjer $40''$, a skala slike iznosi $0,60''/\text{piksel}$. Koliko piksela pokriva njegov disk i je li uzorkovanje dovoljno?
- 16.25. **D** Jedna snimka od 30 s daje $S/N = 150$. Koliko ukupno vremena treba da se postigne $\sigma_m = 0,002$ mag?

II. Rješenja

1. Nebeska sfera i astrognostika

1.1. $\delta > 90^\circ - 45,8^\circ = \boxed{44,2^\circ}$

1.2. Kako je $\delta < \varphi$, kulminacija je južno od zenita: $h = 90^\circ - 43,5^\circ + 38,78^\circ = \boxed{85,3^\circ}$

1.3. Granica je $90^\circ - 45,6^\circ = 44,4^\circ$. Kako je $16,5^\circ < 44,4^\circ$, Aldebaran **nije** cirkumpolarn — izlazi i zalazi.

1.4. $h_P = \varphi = \boxed{42,65^\circ}$

1.5. $\delta = h_{\min} + 90^\circ - \varphi = 5^\circ + 90^\circ - 45^\circ = \boxed{50^\circ}$

1.6. $3 \times 15^\circ = \boxed{45^\circ}$

1.7. $3^\circ/0,5^\circ = \boxed{6}$ puta

1.8. Granica je $\delta = -(90^\circ - \varphi)$. U Puli je to $-45,13^\circ$, pa zvijezda s $\delta = -30^\circ$ **izlazi**. U Helsinkiju je granica $-29,8^\circ$, pa ondje **ne izlazi** (za dlaku).

1.9. Od horizonta do zenita ima 90° , dakle $\boxed{9}$ šaka.

1.10. Orionov pojas leži gotovo na nebeskom ekvatoru ($\delta \approx 0$), a za cirkumpolarnost bi trebalo $\delta > 90^\circ - \varphi$. To bi tražilo $\varphi > 90^\circ$, što ne postoji. Već i Betelgeuse s $\delta = +7,4^\circ$ tražila bi $\varphi > 82,6^\circ$ — dakle usred Arktičkog oceana.

1.11. Zvijezda prolazi zenitom kad je $\delta = \varphi$, dakle na $\boxed{\varphi = 38,78^\circ}$ sjeverne širine.

1.12. Na južnoj polutki uvjet glasi $\delta < -(90^\circ - |\varphi|)$, odnosno $|\varphi| > 90^\circ - 52,7^\circ = \boxed{37,3^\circ}$ južne širine.

1.13. Rujan ima 30 dana, pa je pomak $30 \times 3^m 56^s = 118 \text{ min} = 1^h 58^m$. Kulminacija nastupa u $\boxed{21^h 02^m}$.

1.14. Razlika rektascenzija od 1^h odgovara 15° duž ekvatora, ali na deklinaciji δ luk se skraćuje faktorom $\cos \delta$:

$$d = 15^\circ \cos 50^\circ = \boxed{9,64^\circ}$$

1.15. $\sin \delta = \cos A_0 \cos \varphi = \cos 45^\circ \cdot \cos 45^\circ = 0,500$, dakle $\boxed{\delta = 30^\circ}$.

1.16. $\cos H_0 = -\tan \varphi \tan \delta = -\tan 44,87^\circ \cdot \tan(-16,72^\circ) = +0,2985$

$$H_0 = 72,60^\circ = 4^h 50^m \Rightarrow 2H_0 = \boxed{9^h 41^m}$$

1.17. Nikad vidljiva je kalota oko južnog nebeskog pola, kutnog polumjera $90^\circ - 44,87^\circ = 45,13^\circ$. Udio površine sfere koji ona zauzima je

$$\frac{1 - \cos 45,13^\circ}{2} = \frac{1 - 0,7055}{2} = 0,147 = \boxed{14,7\%}$$

1.18. Objekt kulminira oko ponoći kad je nasuprot Suncu, dakle kad Sunce ima $\alpha \approx 18^h$. To je oko zimskog suncostaja, pa je odgovor $\boxed{\text{prosinac}}$ (točnije: oko 21. prosinca).

1.19. $\Delta h_P = \Delta \varphi = 45,65^\circ - 44,87^\circ = \boxed{0,78^\circ}$, dakle Polara je u Trstu za nešto manje od stupnja viša.

1.20. $h_{\min} = \varphi + \delta - 90^\circ = 45^\circ + 60^\circ - 90^\circ = \boxed{15^\circ}$. Kako je $h_{\min} > 0$, zvijezda **jest cirkumpolarna**.

1.21. $\Delta\alpha = 40,7^{\text{m}} = 0,6783^{\text{h}} = 10,175^{\circ}$

$$\cos d = \sin 7,41^{\circ} \sin(-8,20^{\circ}) + \cos 7,41^{\circ} \cos(-8,20^{\circ}) \cos 10,175^{\circ}$$

$$\cos d = -0,0184 + 0,9661 = 0,9477 \Rightarrow \boxed{d = 18,6^{\circ}}$$

1.22. Iz $\sin h = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos H$:

$$0,500 = 0,7071 \cdot 0,3420 + 0,7071 \cdot 0,9397 \cos H = 0,2419 + 0,6645 \cos H$$

$$\cos H = 0,3885 \Rightarrow H = 67,14^{\circ} = \boxed{4^{\text{h}}29^{\text{m}}}$$

1.23. Uz $H = 90^{\circ}$ drugi član otpada:

$$\sin h = \sin 44,87^{\circ} \sin 89,264^{\circ} = 0,7054 \Rightarrow \boxed{h = 44,87^{\circ}}$$

$$\tan A = \frac{\sin H}{\sin \varphi \cos H - \cos \varphi \tan \delta} = \frac{1}{-0,7087 \cdot 79,04} = -0,01785 \Rightarrow \boxed{A \approx 1,0^{\circ}}$$

Polara dakle tijekom dana šeta oko $\pm 1^{\circ}$ oko pravog sjevera. Za grubu orijentaciju to je zanemarivo, ali za polarno poravnanje montaže nije — ondje se mora uzeti pravi pol, a ne Polara.

1.24. Sunce prividno prelazi 15° na sat, pa je

$$t = \frac{0,53^{\circ}}{15^{\circ}/\text{h}} = 0,0353 \text{ h} = \boxed{2,1 \text{ minute}}$$

1.25. $\Delta\varphi = 100/111,2 = 0,899^{\circ}$. Kako je $h = 90^{\circ} - \varphi + \delta$, povećanje širine *smanjuje* visinu:

$$\Delta h = \boxed{-0,90^{\circ}}$$

2. Koordinatni sustavi, gibanje Zemlje i vrijeme

2.1. $z = 90^{\circ} - 62^{\circ} = \boxed{28^{\circ}}$

2.2. Pri kulminaciji je $H = 0$, pa je $\theta = \alpha = \boxed{14^{\text{h}}20^{\text{m}}}$.

2.3. $H = \theta - \alpha = 8^{\text{h}}00^{\text{m}} - 5^{\text{h}}30^{\text{m}} = \boxed{2^{\text{h}}30^{\text{m}}}$

2.4. Negativan satni kut znači da je zvijezda **istočno od meridijana** i da će kulminirati za tri sata.

2.5. $\Delta\lambda = 18,7^{\circ} - 15^{\circ} = 3,7^{\circ}$, pa je $\Delta t = 4 \times 3,7 = \boxed{14,8 \text{ min}}$. Osijek je istočnije od središnjeg meridijana, pa mjesno vrijeme **žuri** pred pojasnim.

2.6. $h = 90^{\circ} - 45,8^{\circ} + 0^{\circ} = \boxed{44,2^{\circ}}$

2.7. $\boxed{365,25}$ sunčevih i $\boxed{366,25}$ zvjezdanih dana.

2.8. $\delta_{\odot} = 23,44^{\circ} \sin\left(\frac{360}{365}(121 - 81)\right) = 23,44^{\circ} \sin 39,45^{\circ} = \boxed{+14,9^{\circ}}$

2.9. Sunčani sat pokazuje **pravo mjesno sunčevo vrijeme**. Od zidnog sata razlikuje se za jednadžbu vremena (do $\pm 16 \text{ min}$), za razliku geografskih dužina i, ljeti, za sat pomaka.

2.10. Kako je $\delta > \varphi$, kulminira **sjeverno od zenita**: $h = 90^{\circ} + 45^{\circ} - 80^{\circ} = \boxed{55^{\circ}}$.

2.11. $\cos H_0 = -\tan 45,8^{\circ} \cdot \tan(-23,44^{\circ}) = +0,4459$

$$H_0 = 63,52^{\circ} = 4^{\text{h}}14^{\text{m}} \Rightarrow 2H_0 = \boxed{8^{\text{h}}28^{\text{m}}}$$

2.12. O ekvinociju je Sunce u proljetnoj točki, dakle $\alpha_{\odot} \approx 0^{\text{h}}$. U ponoć je satni kut Sunca 12^{h} , pa je $\theta = H_{\odot} + \alpha_{\odot} = \boxed{12^{\text{h}}}$.

2.13. $H = \theta - \alpha = 2^{\text{h}} = 30^{\circ}$

$$\sin h = \sin^2 45^{\circ} + \cos^2 45^{\circ} \cos 30^{\circ} = 0,5 + 0,5 \cdot 0,8660 = 0,9330 \Rightarrow \boxed{h = 68,9^{\circ}}$$

2.14. $E = T_{\text{pravo}} - T_{\text{srednje}}$, pa je $T_{\text{srednje}} = 12^{\text{h}}00^{\text{m}} - 16,4^{\text{m}} = \boxed{11^{\text{h}}43,6^{\text{m}}}$.

2.15. Kako je $M = 1 \leq 2$: $Y = 2026$, $M = 13$; $A = 20$, $B = -13$.

$$[365,25 \cdot 6742] = 2\,462\,515, \quad [30,6001 \cdot 14] = 428$$

$$\text{JD} = 2\,462\,515 + 428 + 1 - 13 - 1524,5 = \boxed{2\,461\,406,5}$$

2.16. Sunce obiđe 24^{h} rektascenzije u godini:

$$\frac{24^{\text{h}}}{365,25} = 3,94 \text{ min} = \boxed{0,986^{\circ}}$$

To je upravo onaj stupanj dnevno koji razdvaja zvjezdani i sunčev dan.

2.17. $\cos A_0 = \frac{\sin 23,44^{\circ}}{\cos 44,87^{\circ}} = \frac{0,3978}{0,7087} = 0,5612 \Rightarrow \boxed{A_0 = 55,9^{\circ}}$, dakle sjeveroistočno.

2.18. Približno pola godine, ali zapravo oko $\boxed{186 \text{ dana}}$. Dulje je od pola godine iz dvaju razloga: refrakcija podiže Sunce za $34'$ pa ono izlazi ranije i zalazi kasnije, a Zemlja se ljeti (u afelu) giba sporije pa sjeverno ljeto traje dulje od zimskog.

2.19. $\theta = \theta_G + \lambda = 1^{\text{h}} + 1^{\text{h}} = 2^{\text{h}}$, pa je $H = \theta - \alpha = 0$. Zvijezda **upravo kulminira**.

2.20. $\boxed{\text{Nijedanput.}}$ Sunce prolazi zenitom samo ondje gdje je $|\varphi| \leq \varepsilon = 23,44^{\circ}$, dakle između obratnica. Zagreb je na $45,8^{\circ}$, daleko izvan tog pojasa.

2.21. Uz $\alpha = 90^{\circ}$:

$$\sin \beta = \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon \sin \alpha = 0,3420 \cdot 0,9175 - 0,9397 \cdot 0,3979 = -0,0601$$

$$\boxed{\beta = -3,44^{\circ}}$$

Za dužinu, iz $\cos \beta \cos \lambda = \cos \delta \cos \alpha = 0$ slijedi $\lambda = 90^{\circ}$ ili 270° ; predznak sinusa daje $\boxed{\lambda = 90,0^{\circ}}$.

2.22. Za $\delta = 0$ formula se pojednostavljuje na $\cos H = \sin h_0 / \cos \varphi$:

$$H_{-18^{\circ}} = \arccos \frac{-0,3090}{0,7087} = 115,85^{\circ}, \quad H_{-0,83^{\circ}} = \arccos \frac{-0,01454}{0,7087} = 91,18^{\circ}$$

$$\Delta H = 24,67^{\circ} = \boxed{1^{\text{h}}39^{\text{m}}}$$

2.23. $22^{\text{h}} \text{ CEST} = 20^{\text{h}} \text{ UT}$, pa je $\text{JD} = 2\,461\,276,5 + 20/24 = 2\,461\,277,333$.

$$\theta_G = 280,4606^{\circ} + 360,9857^{\circ} \cdot 9732,333 \equiv 273,62^{\circ} = 18^{\text{h}}14^{\text{m}}$$

$$\theta = \theta_G + \lambda = 273,62^{\circ} + 13,85^{\circ} = 287,47^{\circ} = \boxed{19^{\text{h}}10^{\text{m}}}$$

2.24. Bez refrakcije je $H_0 = 90^{\circ}$. S refrakcijom:

$$\cos H_0 = \frac{\sin(-0,833^{\circ})}{\cos 45^{\circ}} = -0,02057 \Rightarrow H_0 = 91,18^{\circ}$$

Dan se produljuje na obje strane, ukupno za

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 1,18^{\circ}}{15^{\circ}/\text{h}} = 0,157 \text{ h} = \boxed{9,4 \text{ minute}}$$

2.25. Dan od 14 sati znači $H_0 = 7^h = 105^\circ$, pa je $\cos H_0 = -0,2588$:

$$\tan \delta = \frac{-\cos H_0}{\tan \varphi} = \frac{0,2588}{0,9946} = 0,2602 \Rightarrow \boxed{\delta_\odot = +14,6^\circ}$$

Sunce ima tu deklinaciju oko **1. svibnja** i ponovno oko **12. kolovoza**.

3. Udaljenosti i zvjezdane veličine

3.1. $d = 1/0,050 = \boxed{20 \text{ pc}}$; $20 \times 3,26 = \boxed{65,2 \text{ ly}}$

3.2. $p = 1/15 = \boxed{0,0667''}$

3.3. $\boxed{63\,241 \text{ AJ}}$

3.4. $10^{0,4 \cdot 2,5} = 10^1 = \boxed{10 \times}$

3.5. $m = 6,0 - 2,5 \log 2 = 6,0 - 0,75 = \boxed{5,25}$

3.6. $\Delta m = 0,03 + 1,46 = 1,49$, pa je omjer $10^{0,4 \cdot 1,49} = \boxed{3,95 \times}$

3.7. $\boxed{3,26 \text{ ly}}$

3.8. $\boxed{4,24 \text{ godine}}$ — vidimo je kakva je bila u trenutku kad je svjetlost krenula.

3.9. $\Delta m = \boxed{5}$ magnituda.

3.10. Jer paralaksa pada s udaljenošću kao $1/d$, pa na velikim udaljenostima postaje manja od mjerne nesigurnosti. Kod $d = 1000 \text{ pc}$ paralaksa iznosi svega $0,001''$, a relativna se pogreška naglo penje. Zato se dalje mora prijeći na druge stepenice ljestvice udaljenosti.

3.11. $m - M = 6,3 = 5 \log d - 5 \Rightarrow \log d = 2,26$, $\boxed{d = 182 \text{ pc}}$

3.12. $m = M + 5 \log d - 5 = -1,5 + 5 \cdot 2,398 - 5 = \boxed{5,49}$

3.13. $\sum 10^{-0,4m_i} = 1,318 \times 10^{-3} + 7,586 \times 10^{-4} + 3,981 \times 10^{-4} = 2,475 \times 10^{-3}$

$$m = -2,5 \log(2,475 \times 10^{-3}) = \boxed{6,52}$$

3.14. To je upravo definicija apsolutne magnitude, pa je $\boxed{m = M_\odot = +4,83}$.

3.15. $m - M = 0$ znači $d = 10 \text{ pc}$, dakle $p = \boxed{0,100''}$.

3.16. $m - M = 13 + 26 = 39 = 5 \log d - 5 \Rightarrow \log d = 8,8$

$$d = 6,31 \times 10^8 \text{ pc} = \boxed{631 \text{ Mpc}}$$

3.17. $\Delta m = -12,70 - (-26,74) = 14,04$

$$\frac{E_\odot}{E_{\text{Mj}}} = 10^{0,4 \cdot 14,04} = \boxed{4,1 \times 10^5}$$

3.18. $d = 1/0,0200 = 50,0 \text{ pc}$. Kako je $d \propto 1/p$, relativne su pogreške jednake: $\Delta d/d = 0,0010/0,0200 = 5,0\%$, pa je $\boxed{d = (50,0 \pm 2,5) \text{ pc}}$.

3.19. Svjetlost u godini prijeđe točno jednu svjetlosnu godinu, dakle $\boxed{1 \text{ ly} = 63\,241 \text{ AJ}}$. Zemlja u istom vremenu prijeđe svega $2\pi \approx 6,3 \text{ AJ}$ — deset tisuća puta manje.

3.20. $d = 1/0,547 = 1,828 \text{ pc}$

$$v_t = 4,74 \cdot 10,36 \cdot 1,828 = \boxed{89,8 \text{ km/s}}$$

3.21. $M = m - 5 \log d + 5 - A = 9,0 - 13,49 + 5 - 1,2 = \boxed{-0,69}$

Bez ekstinkcije dobili biste $M = +0,51$, dakle pogreška od 1,2 magnituda — zvijezdu biste smatrali **tri puta slabijom** nego što jest.

3.22. $m = M + 5 \log d - 5 = 4,83 + 5 \log 1,30 - 5 = \boxed{+0,40}$

To je magnituda usporediva s Procyonom — Sunce bi s Proxime bilo **lako vidljivo golim okom**, kao jedna od sjajnijih zvijezda neba (u zviježđu Kasiopeji).

3.23. Za A: $m = -5,0 + 5 \log 2000 - 5 = 6,51$.

Za B: $6,51 = 5,0 + 5 \log d - 5 \Rightarrow \log d = 1,30, \boxed{d = 20 \text{ pc}}$.

3.24. $M_{\text{skup}} = 4,0 - 2,5 \log 10^5 = 4,0 - 12,5 = \boxed{-8,5}$

3.25. Broj fotona po kvadratnom centimetru: $1,0 \times 10^6 \cdot 10^{-0,4 \cdot 6} = 1,0 \times 10^6 \cdot 3,98 \times 10^{-3} = 3,98 \times 10^3$.
Površina zjenice: $\pi(0,35 \text{ cm})^2 = 0,385 \text{ cm}^2$.

$$N = 3,98 \times 10^3 \cdot 0,385 = \boxed{\approx 1500 \text{ fotona u sekundi}}$$

4. Nebeska mehanika

4.1. $T = \sqrt{a^3} = \sqrt{729} = \boxed{27 \text{ godina}}$

4.2. $a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{64} = \boxed{4 \text{ AJ}}$

4.3. Kod $e = 0$ staza je kružnica, pa je $r_p = r_a = \boxed{2 \text{ AJ}}$.

4.4. $a = \frac{1+5}{2} = \boxed{3 \text{ AJ}}$; $e = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{0,667}$; $T = \sqrt{27} = \boxed{5,20 \text{ god}}$

4.5. $v_1 = \sqrt{\frac{4,903 \times 10^{12}}{1,737 \times 10^6}} = \sqrt{2,822 \times 10^6} = \boxed{1,68 \text{ km/s}}$

4.6. $v_2 = \sqrt{2} \cdot 1,68 = \boxed{2,38 \text{ km/s}}$

4.7. $a = \sqrt[3]{11,86^2} = \sqrt[3]{140,7} = \boxed{5,20 \text{ AJ}}$

4.8. Jer početkom siječnja prolazi **perihelom**. Po drugom Keplerovom zakonu spojnica prebriše jednake površine u jednakim vremenima, pa je bliže Suncu brzina veća; ekvivalentno, vrijedi $v_p r_p = v_a r_a$.

4.9. $M_1 + M_2 = \frac{10^3}{20^2} = \frac{1000}{400} = \boxed{2,5 M_\odot}$

4.10. Ukupna energija je $E = \frac{1}{2}mv^2 - GMm/r$. Na paraboli je brzina u svakoj točki upravo jednaka brzini bijega, $v^2 = 2GM/r$, pa se dva člana ponište i $E = 0$. Tijelo stigne u beskonačnost s brzinom nula — granični slučaj između vezanog i slobodnog gibanja.

4.11. $r_p = 10(1 - 0,9) = \boxed{1 \text{ AJ}}$, $r_a = 10(1,9) = \boxed{19 \text{ AJ}}$

$$v_p = \sqrt{1,327 \times 10^{20} \left(\frac{2}{1,496 \times 10^{11}} - \frac{1}{1,496 \times 10^{12}} \right)} = \boxed{41,1 \text{ km/s}}$$

$$v_a = \sqrt{1,327 \times 10^{20} \left(\frac{2}{2,842 \times 10^{12}} - \frac{1}{1,496 \times 10^{12}} \right)} = \boxed{2,16 \text{ km/s}}$$

Provjera: $v_p/v_a = 19 = r_a/r_p$, kako i mora biti.

4.12. $a = 1,883 \times 10^9 \text{ m}$, $T = 1,442 \times 10^6 \text{ s}$

$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{39,478 \cdot 6,677 \times 10^{27}}{6,674 \times 10^{-11} \cdot 2,079 \times 10^{12}} = \boxed{1,90 \times 10^{27} \text{ kg}}$$

$$4.13. r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{3,986 \times 10^{14} \cdot 7,424 \times 10^9}{39,478} \right)^{1/3} = \boxed{42\,164 \text{ km}}$$

$$4.14. \frac{1}{S} = 1 - \frac{1}{11,86} = 0,9157 \Rightarrow S = \boxed{1,092 \text{ god} = 399 \text{ dana}}$$

$$4.15. a_t = \frac{1 + 0,723}{2} = 0,8615 \text{ AJ}, \quad T_t = \sqrt{0,8615^3} = 0,7996 \text{ god}$$

$$t = \frac{T_t}{2} = 0,400 \text{ god} = \boxed{146 \text{ dana}}$$

$$4.16. v_1 = \sqrt{\frac{4,283 \times 10^{13}}{3,390 \times 10^6}} = \boxed{3,55 \text{ km/s}}$$

$$4.17. E = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{3,986 \times 10^{14} \cdot 1000}{2 \cdot 1,0 \times 10^7} = \boxed{-1,99 \times 10^{10} \text{ J}}$$

$$4.18. T = 11,86/2 = \boxed{5,93 \text{ god}}; \quad a = \sqrt[3]{5,93^2} = \boxed{3,28 \text{ AJ}} \text{ — ondje je i najizrazitija vanjska Kirkwoodova pukotina.}$$

$$4.19. v = \sqrt{1,327 \times 10^{20} \left(\frac{2}{1,471 \times 10^{11}} - \frac{1}{1,496 \times 10^{11}} \right)} = \boxed{30,3 \text{ km/s}}$$

4.20. Zato što se brzine ne zbrajaju, nego se zbrajaju **energije**: $v_3^2 = v_2^2 + \Delta v^2$, gdje je Δv dodatak potreban na Zemljinoj stazi. Uz to Zemlja već ima orbitalnu brzinu od 29,8 km/s, pa se let usmjeri tako da se ona iskoristi — treba dodati samo razliku do 42,1 km/s.

$$4.21. \text{Kružna staza: } \frac{mv_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \Rightarrow v_1^2 = \frac{GM}{R}.$$

$$\text{Bijeg: ukupna energija mora biti nula, } \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{GMm}{R} \Rightarrow v_2^2 = \frac{2GM}{R}.$$

$$\text{Dijeljenjem: } \frac{v_2^2}{v_1^2} = 2 \Rightarrow \boxed{v_2 = \sqrt{2} v_1}.$$

$$4.22. M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{39,478 \cdot 7,495 \times 10^{22}}{6,674 \times 10^{-11} \cdot 7,424 \times 10^9} = \boxed{5,97 \times 10^{24} \text{ kg}}$$

4.23. Uvjet je da centripetalno ubrzanje bude jednako gravitacijskom, dakle da je brzina na ekvatoru jednaka prvoj kozmičkoj, $v_1 = 7,91 \text{ km/s}$:

$$T = \frac{2\pi R}{v_1} = \frac{2\pi \cdot 6,371 \times 10^6}{7910} = 5062 \text{ s} = \boxed{1,41 \text{ sata}}$$

$$4.24. r = 1,496 \times 10^{11} \left(\frac{3,00 \times 10^{-6}}{3} \right)^{1/3} = 1,496 \times 10^{11} \cdot 0,0100 = \boxed{1,50 \times 10^9 \text{ m}}$$

To je oko 1,5 milijuna kilometara, dakle **četiri puta dalje od Mjeseca**. Ondje su smješteni sunčevi promatrački sateliti (SOHO, DSCOVR).

4.25. Iz $v_p r_p = v_a r_a$ slijedi

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{1+e}{1-e}$$

$$\text{Uz omjer 3: } 3(1-e) = 1+e \Rightarrow 3-3e = 1+e \Rightarrow \boxed{e = 0,50}.$$

5. Elektromagnetsko zračenje i zračenje crnog tijela

$$5.1. \nu = c/\lambda = 3,00 \times 10^8 / 6,00 \times 10^{-7} = \boxed{5,0 \times 10^{14} \text{ Hz}}$$

$$5.2. \lambda = c/\nu = 3,00 \times 10^8 / 1,42 \times 10^9 = \boxed{0,211 \text{ m} = 21 \text{ cm}}$$

5.3. $\lambda_{\max} = 2,898 \times 10^{-3} / 3500 = \boxed{828 \text{ nm}}$ — u bliskom infracrvenom.

5.4. $T = 2,898 \times 10^{-3} / 1,45 \times 10^{-7} = \boxed{2,0 \times 10^4 \text{ K}}$

5.5. $E = 1240 / 656,3 = \boxed{1,89 \text{ eV}}$

5.6. $L \propto R^2$, dakle $\boxed{9 \times}$.

5.7. $L \propto T^4$, dakle $\boxed{16 \times}$.

5.8. Zbog **Rayleighova raspršenja**, koje ide s λ^{-4} pa je mnogo jače za plavo. Danju vidimo raspršenu plavu svjetlost s cijelog neba; pri zalasku svjetlost prolazi kroz mnogo deblji sloj zraka, plavo se izraspe u stranu, a do nas dođe ostatak — crveno.

5.9. Ultraljubičasto, rendgensko i gama-zračenje, jer ih ozon i gornja atmosfera potpuno apsorbiraju. Veći dio infracrvenog upijaju vodena para i ugljikov dioksid. Prolaze samo **optički i radijski** prozor.

5.10. **Vruća**. Prema Wienovu zakonu maksimum u UV znači $T > 10^4 \text{ K}$, što odgovara klasama $\boxed{\text{B ili O}}$.

5.11. $\frac{L}{L_{\odot}} = 5^2 \left(\frac{20\,000}{5772} \right)^4 = 25 \cdot 144,2 = \boxed{3,6 \times 10^3}$

5.12. $\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\sqrt{L/L_{\odot}}}{(T/T_{\odot})^2} = \frac{0,0316}{1,921} = \boxed{0,0165 R_{\odot}}$ — oko dva puta veće od Zemlje, dakle **bijeli patuljak**.

5.13. $\Delta\lambda = 485,2 - 486,1 = -0,9 \text{ nm}$

$$v_r = c \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = 3,00 \times 10^5 \cdot \frac{-0,9}{486,1} = \boxed{-555 \text{ km/s}}$$

Pomak je prema plavom, dakle objekt nam se **približava**.

5.14. $T = \left(\frac{S}{4\sigma} \right)^{1/4} = \left(\frac{1361}{4 \cdot 5,67 \times 10^{-8}} \right)^{1/4} = \boxed{278 \text{ K}}$

5.15. $F = \sigma T^4 = 5,67 \times 10^{-8} \cdot 5772^4 = \boxed{6,29 \times 10^7 \text{ W/m}^2}$

5.16. $L = 4\pi R^2 F = 4\pi (6,957 \times 10^8)^2 \cdot 6,29 \times 10^7 = \boxed{3,83 \times 10^{26} \text{ W}}$

5.17. $\Delta E = 13,6 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) = 2,55 \text{ eV}$

$$\lambda = \frac{1240}{2,55} = \boxed{486 \text{ nm}}$$

To je linija **H β** .

5.18. $\lambda = 1240 / 13,6 = \boxed{91,2 \text{ nm}}$ — u dalekom ultraljubičastom. Zato neutralni vodik u međuzvezdanom prostoru postoji: takvih je fotona vrlo malo.

5.19. $v = zc = 0,020 \cdot 3,00 \times 10^5 = \boxed{6,0 \times 10^3 \text{ km/s}}$

5.20. $B - V = 0,00$ po definiciji odgovara klasi $\boxed{\text{A0}}$, dakle $T \approx 9800 \text{ K}$. Primjeri su Vega i Sirius.

5.21. $\frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\sqrt{1,5 \times 10^4}}{(3400/5772)^2} = \frac{122,5}{0,347} = \boxed{353 R_{\odot}}$

$$R = 353 \cdot 6,957 \times 10^8 = 2,46 \times 10^{11} \text{ m} = \boxed{1,64 \text{ AJ}}$$

Hladna i golema — **crveni superdiv**, poput Betelgeuse.

- 5.22. Iz $L = 4\pi R^2 \sigma T^4$ uz jednak L slijedi $R^2 T^4 = \text{konst.}$, dakle $R \propto T^{-2}$. Iz Wienova zakona je $T \propto 1/\lambda_{\max}$, pa je $T^{-2} \propto \lambda_{\max}^2$ i konačno

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{\lambda_{\max,1}}{\lambda_{\max,2}} \right)^2$$

5.23. $v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,38 \times 10^{-23} \cdot 6000}{23 \cdot 1,66 \times 10^{-27}}} = 2,08 \times 10^3 \text{ m/s}$

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{v}{c} = 589 \cdot \frac{2,08 \times 10^3}{3,00 \times 10^8} = 4,1 \times 10^{-3} \text{ nm}$$

Natrij je težak, pa mu je proširenje osjetno manje nego kod vodika.

5.24. $(1+z)^2 = 2,25$

$$\frac{v}{c} = \frac{2,25 - 1}{2,25 + 1} = 0,385 \Rightarrow v = 1,15 \times 10^5 \text{ km/s}$$

Nerelativistički bi izašlo $v = 0,5c = 1,5 \times 10^5 \text{ km/s}$, dakle **30 % previše**.

5.25. Energija jednog fotona: $E = 1240/500 = 2,48 \text{ eV} = 3,97 \times 10^{-19} \text{ J}$.

$$N = \frac{L_{\odot}}{E} = \frac{3,83 \times 10^{26}}{3,97 \times 10^{-19}} = \approx 10^{45} \text{ fotona u sekundi}$$

6. Teleskopi i opažački instrumenti

6.1. $M = 750/25 = 30\times$; $N = 750/150 = f/5$; $d_{iz} = 150/30 = 5 \text{ mm}$

6.2. $\theta = 138/150 = 0,92''$

6.3. $(150/7)^2 = 459\times$

6.4. $m_{\text{gran}} = 2 + 5 \log 150 = 2 + 10,88 = 12,9$

6.5. $\text{PVP} = 68^\circ/30 = 2,3^\circ$

- 6.6. Jer je azimutalna montaža mehanički mnogo jednostavnija: dvije okomite osi, bez protuutega i bez potrebe za polarnim poravnanjem. Novac tako odlazi u **zrcalo**, a ne u mehaniku — otud najviše otvora po kuni.

- 6.7. **Kromatska aberacija**, jer staklo lomi plavu svjetlost jače od crvene, pa svaka boja ima svoje žarište. Zrcalo odbija sve boje jednako, pa je kod reflektora nema.

- 6.8. Treperenje i razlijevanje slike zbog turbulencije zraka. Izražava se **kutnim promjerom mrlje** u koju se razlije zvijezda, u lučnim sekundama; tipično $1''$ – $4''$.

6.9. $\theta = 1,22 \cdot \frac{0,06}{64} = 1,144 \times 10^{-3} \text{ rad} = 3,9'$ — gore od golog oka.

6.10. $206\,265/600 = 344''/\text{mm}$

6.11. $f_{\text{ok}} = f/M = 2000/200 = 10 \text{ mm}$

6.12. $d_{iz} = 200/50 = 4 \text{ mm}$ — **jest** razumno, jer je između $0,5$ i 7 mm .

6.13. $M_{\min} = D/7 = 300/7 = 43\times$. Ispod toga izlazna zjenica prelazi 7 mm , pa dio snopa promašuje zjenicu oka i svjetlost se **gubi**.

6.14. $M_{\max} \approx 2D = \boxed{600\times}$. Iznad toga slika se samo povećava bez novih pojedinosti — **prazno povećanje** — a postaje tamnija i mekša.

6.15. Omjer skupljene svjetlosti je $(200/80)^2 = 6,25$. Kako je $S/N \propto \sqrt{t}$, treba $\boxed{6,25\times}$ dulje vrijeme.

6.16. $\theta = \frac{1,3 \times 10^{-3}}{1000} = 1,3 \times 10^{-6} \text{ rad} = \boxed{0,27''}$

6.17. $\frac{206\,265}{1200} \cdot 0,00376 = \boxed{0,65''/\text{piksel}}$

6.18. $40/0,65 = \boxed{\approx 62 \text{ piksela}}$ po promjeru.

6.19. $f = N \cdot D = 4 \cdot 250 = \boxed{1000 \text{ mm}}$. Brzi sustav daje široko vidno polje i kratku ekspoziciju za protežne objekte, ali je osjetljiviji na komu i traži precizniju kolimaciju.

6.20. Zato što je mehanički mnogo lakše nositi stotine tona oko okomite osi nego oko nagnute. Rotaciju vidnog polja rješava **derotator** kojim upravlja računalo — rješenje koje je jeftinije od velikog ekvatorijalnog nosača.

6.21. Prikupljena svjetlost je $E \propto D^2$. Granica je ondje gdje E padne na neku fiksnu vrijednost, pa iz Pogsonove relacije

$$m_{\text{gran}} = -2,5 \log E + \text{konst.} = -2,5 \log D^2 + \text{konst.} = \boxed{\text{konst.} + 5 \log D}$$

6.22. $\theta = 0,50'' = 2,42 \times 10^{-6} \text{ rad}$

$$D = \frac{1,22\lambda}{\theta} = \frac{1,22 \cdot 5,5 \times 10^{-7}}{2,42 \times 10^{-6}} = \boxed{0,28 \text{ m} = 280 \text{ mm}}$$

6.23. $\theta = 138/2000 = 0,069'' = 3,35 \times 10^{-7} \text{ rad}$

$$s = \theta d = 3,35 \times 10^{-7} \cdot 3,844 \times 10^8 = \boxed{129 \text{ m}}$$

Dakle **ne bi**, ali vrlo blizu — trebao bi otvor od oko 2,6 m.

6.24. Signal raste s D^2 , a fotonski šum sa $\sqrt{S} \propto D$. Zato je $S/N \propto D$, pa je omjer $\boxed{2\times}$ u korist većeg teleskopa.

6.25. Zato što razlučivanje interferometra ne određuje promjer pojedine antene, nego **razmak najudaljenijih** antena. Faktor 1,22 potječe od Airyjeva uzorka kružnog otvora i ne primjenjuje se na sustav razdvojenih antena; ondje razlučivanje određuje najveća projicirana baza.

7. Sunčev sustav: planeti

7.1. $\frac{1}{S} = 1 - \frac{1}{29,46} = 0,9661 \Rightarrow S = \boxed{1,035 \text{ god} = 378 \text{ dana}}$ — Saturn je u opoziciji otprilike dva tjedna kasnije svake godine.

7.2. $V = \frac{4}{3}\pi(2,440 \times 10^6)^3 = 6,08 \times 10^{19} \text{ m}^3$

$$\rho = \frac{3,301 \times 10^{23}}{6,08 \times 10^{19}} = \boxed{5430 \text{ kg/m}^3}$$

7.3. $g = \frac{4,903 \times 10^{12}}{(1,737 \times 10^6)^2} = \boxed{1,62 \text{ m/s}^2}$ — oko šestine Zemljine.

7.4. $v_2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 3,249 \times 10^{14}}{6,052 \times 10^6}} = \boxed{10,4 \text{ km/s}}$

- 7.5. Jer se **prespore rotira** (jedan okret za 243 dana). Dinamo-mehanizam traži i tekuću vodljivu jezgru *i* dovoljno brzu rotaciju; Venera ima prvo, ali ne i drugo.
- 7.6. $\boxed{\text{Uran}}$, s nagibom od 98° . Polovi mu naizmjenice gledaju ravno u Sunce po 42 godine, pa na njima traje polustoljetni dan i jednako duga noć.
- 7.7. Venerin dan traje 243 zemaljska dana, a godina 225 — dakle $\boxed{\text{dan je dulji od godine}}$. Uz to rotira retrogradno.
- 7.8. Jer nema atmosfere koja bi prenosila i zadržavala toplinu, a rotacija mu je spora (59 dana). Podnevna strana doseže 700 K, noćna pada na 100 K.
- 7.9. $\boxed{\text{Zemlja}}$, 5514 kg/m^3 . Iako Merkur ima veći udio željeza, Zemlja je masivnija pa joj je unutrašnjost jače stlačena.
- 7.10. $\boxed{95,2 M_\oplus}$ i $\boxed{9,45 R_\oplus}$.
- 7.11. $T = 278,3 \cdot \frac{(0,75)^{1/4}}{\sqrt{1,524}} = 278,3 \cdot \frac{0,931}{1,234} = \boxed{210 \text{ K}}$
- 7.12. $\frac{1}{S} = \frac{1}{0,241} - 1 = 3,149 \Rightarrow S = \boxed{0,318 \text{ god} = 116 \text{ dana}}$
- 7.13. $\sin \varepsilon_{\max} = 0,387 \Rightarrow \boxed{\varepsilon_{\max} = 22,8^\circ}$ — zato je Merkur uvijek nisko u sumraku.
- 7.14. $\left(\frac{30,1}{1}\right)^2 = \boxed{906 \times}$ slabije.
- 7.15. $V = \frac{4}{3}\pi(2,5362 \times 10^7)^3 = 6,83 \times 10^{22} \text{ m}^3$
- $$\rho = \frac{8,681 \times 10^{25}}{6,83 \times 10^{22}} = \boxed{1270 \text{ kg/m}^3}$$
- 7.16. $\frac{F_{\text{Mj}}}{F_\odot} = \frac{M_{\text{Mj}}/r_{\text{Mj}}^3}{M_\odot/r_\odot^3} = \frac{1,29 \times 10^{-3}}{5,94 \times 10^{-4}} = \boxed{2,18 \times}$
Zato su najveće plime o mlađaku i uštapu, kad se dva doprinosa zbroje.
- 7.17. $687/1,0275 = \boxed{669 \text{ sola}}$
- 7.18. $T = 278,3 \cdot \frac{(0,88)^{1/4}}{\sqrt{0,387}} = \boxed{433 \text{ K}}$. Ravnotežna temperatura pretpostavlja da se toplina jednako raspoređuje po cijeloj kugli. Merkur nema atmosferu i sporo rotira, pa se podnevna točka grije mnogo jače — do 700 K.
- 7.19. Jer je **mного hladniji**. Titan ima $v_2 = 2,64 \text{ km/s}$, ali temperaturu od svega 94 K, pa je toplinska brzina dušika premala za bijeg. Merkur ima veći v_2 (4,25 km/s), ali temperaturu i do 700 K — svaki plin brzo pobjegne.
- 7.20. $\theta = \frac{0,53^\circ}{5,20} = 0,102^\circ = \boxed{6,1'}$ — Sunce je s Jupitera i dalje dobro razlučeni disk.
- 7.21. $d = 2,44 \cdot 6371 \cdot \left(\frac{5514}{3000}\right)^{1/3} = 2,44 \cdot 6371 \cdot 1,228 = \boxed{1,91 \times 10^4 \text{ km}}$
Mjesec je na $3,84 \times 10^5 \text{ km}$, dakle **dvadeset puta dalje** — posve siguran.
- 7.22. Uvjet je $\omega^2 R = \frac{GM}{R^2} = \frac{4}{3}\pi G \rho R$, odakle se R pokрати:
- $$\omega = \sqrt{\frac{4\pi G \rho}{3}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 2000}{3}} = 7,48 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$
- $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 8400 \text{ s} = \boxed{2,3 \text{ sata}}$$

Doista, među asteroidima većima od nekoliko stotina metara gotovo nema onih s periodom kraćim od 2,2 h.

$$7.23. \quad M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{39,478 \cdot 3,348 \times 10^{33}}{6,674 \times 10^{-11} \cdot 9,96 \times 10^{14}} = \boxed{1,99 \times 10^{30} \text{ kg}}$$

7.24. Zemlja presijeca snop površinom $\pi R_{\oplus}^2$:

$$P = S\pi R_{\oplus}^2 = 1361 \cdot \pi(6,371 \times 10^6)^2 = 1,74 \times 10^{17} \text{ W}$$

$$E = Pt = 1,74 \times 10^{17} \cdot 3,156 \times 10^7 = \boxed{5,5 \times 10^{24} \text{ J}}$$

To je oko deset tisuća puta više od godišnje potrošnje energije cijelog čovječanstva.

7.25. Iz $T \propto \sqrt{L}/\sqrt{d} \cdot (1 - A)^{1/4}$ slijedi da za istu T i isti albedo mora vrijediti $d \propto \sqrt{L}$:

$$d = \sqrt{4} = \boxed{2 \text{ AJ}}$$

Albedo se pokrati jer se pojavljuje na obje strane jednadžbe s istim eksponentom.

8. Sunčev sustav: mala tijela

8.1. **Asteroid** je stjenovito ili metalno tijelo, uglavnom iz glavnog pojasa. **Komet** je ledeno tijelo koje blizu Sunca razvija komu i rep. **Meteoroid** je mali komadić tvari u međuplanetarnom prostoru, od zrna prašine do desetak metara.

$$8.2. \quad a = 5,204 \cdot (2/5)^{2/3} = 5,204 \cdot 0,5429 = \boxed{2,83 \text{ AJ}}$$

$$8.3. \quad T = \sqrt{2,77^3} = \boxed{4,61 \text{ godine}}$$

8.4. Jer pukotine postoje u **prostoru elemenata staze**, a ne u prostoru položaja. Asteroidi iz raznih dijelova pojasa u svakom su trenutku razasuti po cijeloj stazi, pa se na nebu ne vidi nikakav prazan prsten — pukotina se pojavi tek kad se nacrtava histogram velikih poluosi.

$$8.5. \quad a = \sqrt[3]{76^2} = \boxed{17,9 \text{ AJ}}$$

8.6. Zato što na čestice prašine djeluje samo **tlak zračenja**, pa one zadržavaju dio orbitalne brzine i nastavljaju se gibati po vlastitim stazama — otud zaostajanje i zakrivljenost. Ionizirani plin nosi **Sunčev vjetar**, koji je mnogo brži, pa ionski rep izlazi gotovo točno radijalno.

8.7. Kuiperov pojas je **plosnat** — prstenasto područje blizu ravnine ekliptike. Oortov oblak je **kuglast**, pa iz njega kometi dolaze iz svih smjerova i pod svim nagibima.

8.8. Jer Trojanci sjede u **stabilnim** Lagrangeovim točkama L_4 i L_5 , gdje ih smetnje vraćaju natrag. U Kirkwoodovim pukotinama smetnje se ponavljaju uvijek u istoj fazi staze, pa se zbrazaju i s vremenom izbacuju asteroid van.

8.9. **Leonidi**. Radijant je točka na nebu iz koje meteori roja prividno izlijeću; to je posljedica perspektive, jer se meteoroidi zapravo gibaju usporedno.

8.10. Jer je tada naša strana Zemlje okrenuta **u smjeru gibanja** po stazi, pa „pokupimo“ i one meteoroidne koje bismo inače sustigli. Prije ponoći vidimo samo one koji nas dostižu straga.

$$8.11. \quad e = 1 - \frac{0,586}{17,83} = \boxed{0,967}; \quad r_a = a(1 + e) = 17,83 \cdot 1,967 = \boxed{35,1 \text{ AJ}} \quad \text{— iza Neptuna.}$$

$$8.12. \quad a = 5,204 \cdot (3/7)^{2/3} = \boxed{2,96 \text{ AJ}}, \text{ što se poklapa s pukotinom 7:3 na oko 2,96 AJ.}$$

$$8.13. \quad \text{ZHR} = \frac{15 \cdot 2,5^{1,5}}{\sin 55^\circ} = \frac{15 \cdot 3,95}{0,819} = \boxed{72}$$

$$8.14. \quad E_k = \frac{1}{2} \cdot 4,0 \times 10^6 \cdot (1,7 \times 10^4)^2 = 5,78 \times 10^{14} \text{ J}$$

$$\frac{5,78 \times 10^{14}}{4,184 \times 10^{12}} = \boxed{138 \text{ kt}}$$

8.15. $r_p = 8,77 \times 10^{10} \text{ m}$, $a = 2,67 \times 10^{12} \text{ m}$

$$v = \sqrt{1,327 \times 10^{20} \left(\frac{2}{8,77 \times 10^{10}} - \frac{1}{2,67 \times 10^{12}} \right)} = \boxed{54,6 \text{ km/s}}$$

8.16. $T = \sqrt{39,48^3} = \boxed{248 \text{ godina}}$

8.17. $\frac{2,4 \times 10^{21}}{5,97 \times 10^{24}} = \boxed{4,0 \times 10^{-4}}$, dakle svega četiri desetisućinke Zemljine mase — manje od 5 % mase Mjeseca.

8.18. $e = 1 - \frac{0,336}{2,22} = \boxed{0,849}$. Period je $T = \sqrt{2,22^3} = 3,3 \text{ god}$, dakle manje od 20 godina — komet **jest** član Jupiterove obitelji.

8.19. Jer se brzine zbrajaju vektorski. Zemlja se giba 29,8 km/s; meteoroidu koji dolazi ususret te se brzine zbrajaju, a one koje je sustiže oduzimaju. Zato su najbrži meteori oni koje susrećemo „čeo“.

8.20. Jer Saros traje 6585,32 dana — **trećinu dana više** od cijelog broja. Zemlja se u tih osam sati zarotira za 120° , pa se ista pomrčina vidi s mjesta udaljenog trećinu opsega. Tek nakon tri Sarosa (54 godine) vraća se približno na istu geografsku dužinu.

8.21. $a = 5,204 \cdot (1/4)^{2/3} = \boxed{2,07 \text{ AJ}}$. Ta je rezonancija na samom unutarnjem rubu pojasa, gdje asteroida ionako gotovo nema, pa se pukotina ne ističe u histogramu.

8.22. Relativna brzina prema Zemlji: ususret $42,1 + 29,8 = 71,9 \text{ km/s}$, odostraga $42,1 - 29,8 = 12,3 \text{ km/s}$. Uz ubrzanje Zemljinom gravitacijom $v = \sqrt{v_{\text{rel}}^2 + v_2^2}$:

$$v_{\text{čeo}} = \sqrt{71,9^2 + 11,2^2} = \boxed{72,8 \text{ km/s}}$$

$$v_{\text{straga}} = \sqrt{12,3^2 + 11,2^2} = \boxed{16,6 \text{ km/s}}$$

8.23. $T = \sqrt{(10^5)^3} = 10^{7,5} = \boxed{3,2 \times 10^7 \text{ godina}}$ — više od trideset milijuna godina po jednom ophodu.

8.24. Volumen kugle: $V = \frac{4}{3}\pi(10^5 \text{ AJ})^3 = 4,2 \times 10^{15} \text{ AJ}^3$. Po tijelu dolazi $4,2 \times 10^3 \text{ AJ}^3$, pa je prosječni razmak

$$\ell \approx \sqrt[3]{4,2 \times 10^3} = \boxed{\approx 16 \text{ AJ}}$$

Oortov oblak je dakle nezamislivo rijedak — susjedi su mu udaljeni kao Uran od Sunca.

8.25. $\theta = \frac{10^8}{1,496 \times 10^{11}} = 6,68 \times 10^{-4} \text{ rad} = \boxed{2,3'}$

To je oko 1/13 promjera Mjeseca — koma velikog kometa doista je vidljiva kao mutna mrlja mjerljive veličine.

9. Sunce i izvori zvjezdane energije

9.1. $F = \frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2} = \frac{3,828 \times 10^{26}}{4\pi(6,957 \times 10^8)^2} = \boxed{6,29 \times 10^7 \text{ W/m}^2}$

9.2. $S = \frac{1361}{1,524^2} = \boxed{586 \text{ W/m}^2}$ — manje od polovice zemaljske.

9.3. $t = \frac{1,496 \times 10^{11}}{3,00 \times 10^8} = 499 \text{ s} = \boxed{8,3 \text{ minute}}$

9.4. $\frac{dm}{dt} = \frac{3,828 \times 10^{26}}{9,00 \times 10^{16}} = \boxed{4,25 \times 10^9 \text{ kg/s}} = 4,25 \text{ milijuna tona u sekundi.}$

- 9.5. Jer su hladnije od okoline (≈ 4000 K prema 5772 K), pa po Stefan-Boltzmannovu zakonu zrače nekoliko puta slabije. Tamne su samo **u kontrastu**; izdvojena pjega sjala bi jače od punog Mjeseca.
- 9.6. **Jezgra** (fuzija) $\rightarrow$ **zona zračenja** (fotoni se neprestano apsorbiraju i ponovno emitiraju) $\rightarrow$ **konvektivna zona** (strujanje vruće tvari) $\rightarrow$ **fotosfera** (odakle svjetlost slobodno izlazi).
- 9.7. Broj pjega mijenja se u ciklusu od ≈ 11 godina, ali se **magnetski polaritet** mijenja svakim ciklusom. Zato se magnetsko stanje Sunca ponovi tek nakon 22 godine.
- 9.8. **Prominencija** je oblak razmjerno hladnog plina koji magnetsko polje drži iznad površine i može trajati tjednima. **Bljesak** je nagao otpust energije pri ponovnom spajanju silnica i traje minutama.
- 9.9. Jer je milijun puta slabija od fotosfere. Tek kad Mjesec zakloni disk, raspršena svjetlost padne dovoljno da se korona vidi.
- 9.10. $S = \frac{1361}{5,204^2} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">50,3 \text{ W/m}^2$
- 9.11. Energija po jezgri: $26,7 \times 10^6 \cdot 1,602 \times 10^{-19} = 4,28 \times 10^{-12} \text{ J}$.
- $$N = \frac{3,828 \times 10^{26}}{4,28 \times 10^{-12}} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">8,9 \times 10^{37} \text{ jezgara u sekundi}$$
- 9.12. $\Delta m = 4,25 \times 10^9 \cdot 3,156 \times 10^7 \cdot 4,6 \times 10^9 = 6,17 \times 10^{26} \text{ kg}$
- $$\frac{\Delta m}{M_{\odot}} = \frac{6,17 \times 10^{26}}{1,989 \times 10^{30}} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3,1 \times 10^{-4}$$
- Dakle svega tri desettisućinke — zanemarivo za stazu planeta.
- 9.13. $\left(\frac{5772}{4200}\right)^4 = (1,374)^4 = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">3,6 \times$
- 9.14. $6,5 \times 10^{10} \cdot 10^4 = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">6,5 \times 10^{14} neutrina po kvadratnom metru u sekundi.$
- 9.15. Iz prethodnog: $8,9 \times 10^{37}$ jezgara u sekundi, svaka od četiri protona mase $1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, dakle $5,9 \times 10^{11} \text{ kg/s}$.
- $$5,9 \times 10^{11} \cdot 3,156 \times 10^7 = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1,9 \times 10^{19} \text{ kg/god}$$
- To je $\approx 10^{-11}$ Sunčeve mase godišnje.
- 9.16. $R = 1 \cdot (10 \cdot 4 + 23) = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">63$
- 9.17. Zbog goleme razlike u osjetljivosti na temperaturu: $\varepsilon_{pp} \propto T^4$, a $\varepsilon_{CNO} \propto T^{18}$. Ispod $\approx 1,8 \times 10^7$ K pp-lanac je brži, iznad toga CNO naglo preuzima. Masivnije zvijezde imaju vrelje jezgre, pa u njima prevladava CNO.
- 9.18. Jer se foton u zoni zračenja neprestano apsorbira i ponovno emitira u nasumičnom smjeru — napreduje **nasumičnim hodom**, pa put od jezgre do površine traje $\sim 10^5$ godina. Neutrino gotovo ne stupa u međudjelovanje s tvari, pa izađe pravocrtno, brzinom svjetlosti.
- 9.19. $t = \frac{M_{\odot} \cdot 0,007 \cdot c^2}{L_{\odot}} = \frac{1,989 \times 10^{30} \cdot 0,007 \cdot 9 \times 10^{16}}{3,828 \times 10^{26}} = 3,27 \times 10^{18} \text{ s} = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">1,0 \times 10^{11} \text{ god}$
- Stotinu milijardi godina — ali samo oko 10 % mase doista prolazi kroz jezgru, pa je stvarni vijek deset puta kraći.
- 9.20. Jer je **magnetosfera** skreće. Nabijene čestice ne mogu prijeći magnetske silnice, pa Sunčev vjetar obilazi Zemlju. Mars je izgubio magnetsko polje prije oko četiri milijarde godina i time i najveći dio atmosfere.

$$9.21. t_{KH} = \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}L_{\odot}} = \frac{6,674 \times 10^{-11} (1,989 \times 10^{30})^2}{6,957 \times 10^8 \cdot 3,828 \times 10^{26}} = 9,9 \times 10^{14} \text{ s} = \boxed{31 \text{ milijun godina}}$$

Geolozi su iz debljine slojeva stijena već sredinom 19. stoljeća zaključili da je Zemlja stara **barem stotine milijuna godina**. Kako Zemlja ne može biti starija od Sunca, kontrakcija je morala biti odbačena — nedostajao je nepoznat izvor energije.

$$9.22. \frac{L}{L_{\odot}} = 2^{3,5} = \boxed{11,3}$$

$$t = 10^{10} \cdot 2^{-2,5} = \boxed{1,8 \times 10^9 \text{ godina}}$$

Dvostruko masivnija zvijezda živi gotovo šest puta kraće.

9.23. $\frac{1,5 \times 10^5}{1000} = \boxed{150 \times}$ gušće od vode. Tvar ipak nije čvrsta jer je pri $1,57 \times 10^7 \text{ K}$ potpuno ionizirana — riječ je o **plazmi**, plinu golemog tlaka u kojemu su elektroni odvojeni od jezgara, pa se ona mogu vrlo gusto zbiti.

9.24. Oslobođena gravitacijska energija je reda GM^2/R , a stiskanjem na $R/2$ oslobodi se otprilike jednako toliko koliko iznosi t_{KH} , dakle $\boxed{\approx 3 \times 10^7 \text{ godina}}$. Zaključak se ne mijenja: red veličine ostaje desetak milijuna godina, što je predaleko od stvarne dobi.

9.25. Zbog **kvantnog tuneliranja**. Klasično protoni s prosječnom toplinskom energijom (oko 1,4 keV) ne bi mogli svladati Coulombovu barijeru visoku oko 1 MeV. Fuziju ipak omogućuje mali dio protona iz repa Maxwelllove raspodjele koji uspije protunelirati kroz barijeru — otud i golema osjetljivost brzine reakcije na temperaturu.

10. Fotometrija, spektroskopija i HR-dijagram

10.1. $E \propto 1/d^2$, dakle $\boxed{4 \times}$ slabije.

10.2. $m - M = 0$ znači $d = \boxed{10 \text{ pc}}$ — to je upravo definicija apsolutne magnitude.

10.3. $M_{\text{bol}} = 4,83 + (-0,09) = \boxed{+4,74}$

10.4. **O** plava, **B** plavo-bijela, **A** bijela, **F** žuto-bijela, **G** žuta, **K** narančasta, **M** crvena.

10.5. **K** — spektralna klasa, dakle temperatura oko 4000 K; **5** — podrazred unutar klase, bliže klasi M; **III** — klasa sjaja, dakle **div**. Primjer: Aldebaran.

10.6. Jer jačina Balmerovih linija ovisi o broju atoma u stanju $n = 2$. Kod hladnih zvijezda gotovo su svi atomi u osnovnom stanju, a kod najtoplijih je vodik **ioniziran** pa nema elektrona koji bi apsorbirali. Maksimum je oko 10 000 K, dakle kod klase A.

10.7. **Dolje lijevo** — vrući su (T velika, dakle lijevo), ali slabi (M velik, dakle dolje). To je moguće samo ako su vrlo mali, otprilike veličine Zemlje.

10.8. **Hladna**. Velik pozitivan indeks boje znači crvenu zvijezdu, ovdje oko 3900 K, dakle klasu M.

10.9. **Masa**. Iz nje slijede luminozitet, temperatura, polumjer i vijek — zato glavni niz i jest niz, a ne mrlja.

10.10. Jer V -filtar propušta samo dio spektra. Ukupno zračenje uvijek je veće od onoga u vizualnom području, pa je bolometrijska magnituda uvijek *manja* (sjajnija) od vizualne.

$$10.11. M = m - 5 \log d + 5 = 6,5 - 5 \cdot 2,079 + 5 = \boxed{+1,10}$$

$$10.12. m - M = 13,0 = 5 \log d - 5 \Rightarrow \log d = 3,6, \boxed{d = 3,98 \times 10^3 \text{ pc}}$$

$$10.13. \frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0,4(4,83+2,3)} = 10^{2,852} = \boxed{711 \times}$$

$$10.14. \frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\sqrt{3000}}{(4500/5772)^2} = \frac{54,77}{0,6079} = \boxed{90 R_{\odot}} — crveni div.$$

$$10.15. T = 4600 \left(\frac{1}{2,114} + \frac{1}{1,034} \right) = 4600 \cdot 1,440 = \boxed{6600 \text{ K}}, \text{ dakle klasa } \mathbf{F}.$$

$$10.16. t = 10^{10} \cdot 0,60^{-2,5} = 10^{10} \cdot 3,59 = \boxed{3,6 \times 10^{10} \text{ godina}} — \text{dulje nego što je svemir star.}$$

$$10.17. \frac{L}{L_{\odot}} = 0,60^{3,5} = \boxed{0,167}$$

$$10.18. M = 5,5 - 2,5 \log 10^4 = 5,5 - 10 = \boxed{-4,5}$$

$$10.19. m - M = 14,8 - 1,4 = 13,4 = 5 \log d - 5 \Rightarrow \log d = 3,68$$

$$d = \boxed{4,8 \times 10^3 \text{ pc}}$$

$$10.20. E(B - V) = 0,35 - 0,00 = 0,35, \text{ pa je } A_V = 3,1 \cdot 0,35 = \boxed{1,09 \text{ mag}}.$$

$$10.21. \frac{R}{R_{\odot}} = \frac{\sqrt{4,0 \times 10^{-4}}}{(11\,000/5772)^2} = \frac{0,0200}{3,632} = \boxed{5,5 \times 10^{-3} R_{\odot}}$$

$$R = 5,5 \times 10^{-3} \cdot 6,957 \times 10^8 = 3,8 \times 10^6 \text{ m}$$

To je oko $0,6 R_{\oplus}$ — manji od Zemlje.

$$10.22. \text{ Iz } t = 10^{10} M^{-2,5} \text{ slijedi } M = \left(\frac{t}{10^{10}} \right)^{-1/2,5} :$$

$$M = (1,2)^{-0,4} = \boxed{0,93 M_{\odot}}$$

$$10.23. \Delta m = 5 \log 2 = \boxed{1,51 \text{ mag}} — \text{dalja je zvijezda za oko jednu i pol magnitudu slabija.}$$

$$10.24. M_{\text{bol}} = 8,2 - 1,9 = \boxed{+6,30}$$

$$\frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0,4(4,74-6,30)} = 10^{-0,624} = 0,238$$

Dakle zrači $\boxed{4,2 \times}$ slabije od Sunca.

$$10.25. \frac{L}{L_{\odot}} = 10^{0,4(4,74+8,4)} = 10^{5,256} = \boxed{1,8 \times 10^5 \times}$$

11. Dvojne i promjenjive zvijezde, evolucija

11.1. Jer masa ulazi u fizikalne zakone samo preko **gravitacijskog djelovanja**. Kod usamljene zvijezde nemamo ništa što bi ona privlačila; kod dvojne komponente privlače jedna drugu, pa iz staze i perioda slijedi masa preko trećeg Keplerovog zakona.

11.2. **Prividno dvojne** samo se slučajno poklapaju na nebu, a zapravo su na posve različitim udaljenostima i nisu vezane. **Fizički dvojne** doista kruže oko zajedničkog centra mase.

11.3. **Manje masivna**, jer vrijedi $M_1 a_1 = M_2 a_2$ — teža komponenta ostaje bliže centru mase.

11.4. Jer je tada zaklonjena **toplija** zvijezda, koja po jedinici površine zrači mnogo jače. Zakloni li se hladnija, izgubi se manje svjetlosti.

11.5. $\boxed{1,44 M_{\odot}}$ — najveća masa koju tlak degeneriranog elektronskog plina može održati. Vrijedi za **bijele patuljke**; iznad nje slijedi kolaps.

- 11.6. **Pulsirajuće** (mijenjaju polumjer i temperaturu, npr. kefeide), **eruptivne** (naglo izbacuju tvar, npr. nove i supernove) i **pomrčinske** (sjaj se mijenja geometrijski, sama zvijezda ne).
- 11.7. Jer im **period izravno odaje luminozitet**. Period se mjeri lako i vrlo točno, iz njega slijedi apsolutna magnituda, a iz modula udaljenosti i udaljenost — pa služe kao izvor svjetla poznate jakosti.
- 11.8. Nakon $2 M_{\odot}$ ostaje **bijeli patuljak** (uz odbačenu planetarnu maglicu); nakon $30 M_{\odot}$ zvijezda eksplodira kao supernova i ostavlja **crnu ružu**.
- 11.9. Jer luminozitet raste s masom mnogo brže od same mase: $L \propto M^{3,5}$, a zaliha goriva samo $\propto M$. Vijek je zato $t \propto M^{-2,5}$.
- 11.10. U Algolu je **manje masivna komponenta evolucijski naprednija** — već je div, dok je masivnija još na glavnom nizu. To je naizgled nemoguće, a objašnjava se **prijenosom mase**: div je nekad bio teži, pa je izgubio masu u korist pratioca.

$$11.11. M_1 + M_2 = \frac{30^3}{60^2} = \frac{27\,000}{3600} = \boxed{7,5 M_{\odot}}$$

$$11.12. a = 0,80'' \cdot 15 \text{ pc} = \boxed{12 \text{ AJ}}$$

$$11.13. M_1 + M_2 = \frac{12^3}{24^2} = \frac{1728}{576} = \boxed{3,0 M_{\odot}}$$

$$11.14. M_V = -2,81 \log 30 - 1,43 = -4,15 - 1,43 = \boxed{-5,58}$$

$$m - M = 14,0 + 5,58 = 19,58 \Rightarrow \log d = 4,92 \Rightarrow \boxed{d = 8,2 \times 10^4 \text{ pc}}$$

Dakle oko 82 kpc — vjerojatno u Velikom Magellanovu oblaku.

$$11.15. \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = \frac{0,25}{0,06} = 4,17 \Rightarrow \boxed{\frac{T_1}{T_2} = 1,43}$$

$$11.16. r_s = \frac{2GM}{c^2} = 20 \cdot 2,95 \text{ km} = \boxed{59 \text{ km}}$$

$$11.17. V = \frac{4}{3}\pi(10^4)^3 = 4,19 \times 10^{12} \text{ m}^3$$

$$\rho = \frac{1,4 \cdot 1,989 \times 10^{30}}{4,19 \times 10^{12}} = \boxed{6,6 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3}$$

Kockica šećera te tvari težila bi milijardu tona.

$$11.18. m - M = 16,5 - 0,6 = 15,9 \Rightarrow \log d = 4,18$$

$$\boxed{d = 1,5 \times 10^4 \text{ pc} = 15 \text{ kpc}}$$

$$11.19. \frac{M_1}{M_2} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{45}{18} = \boxed{2,5}. \text{ Teža je komponenta ona s manjom amplitudom, dakle prva.}$$

- 11.20. Jer se Dopplerovim efektom mjeri samo **radijalna** komponenta brzine. Ako je staza nagnuta, prava je brzina veća od izmjerene za faktor $1/\sin i$, a masa ulazi kroz v^3 , pa se dobiva umnožak $M \sin^3 i$. Kod pomrčinskih je $i \approx 90^\circ$, pa se problem sam rješava.

$$11.21. M_1 + M_2 = \frac{19,8^3}{50,1^2} = 3,09 M_{\odot}. \text{ Uz } M_A/M_B = 2,2:$$

$$M_A = \frac{2,2}{3,2} \cdot 3,09 = \boxed{2,1 M_{\odot}}, \quad M_B = \frac{1}{3,2} \cdot 3,09 = \boxed{0,97 M_{\odot}}$$

$$11.22. R = 0,01 \cdot 6,957 \times 10^8 = 6,96 \times 10^6 \text{ m}$$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,674 \times 10^{-11} \cdot 1,989 \times 10^{30}}{(6,96 \times 10^6)^2} = \boxed{2,7 \times 10^6 \text{ m/s}^2}$$

To je oko $\boxed{2,8 \times 10^5}$ puta više od Zemljine — čovjek bi ondje težio kao dvadeset tisuća tona.

$$11.23. -4,0 = -2,81 \log P - 1,43 \Rightarrow \log P = 0,915$$

$$\boxed{P = 8,2 \text{ dana}}$$

$$11.24. t = \frac{10^{46}}{3,828 \times 10^{26}} = 2,61 \times 10^{19} \text{ s}$$

$$t = \frac{2,61 \times 10^{19}}{3,156 \times 10^7} = \boxed{8,3 \times 10^{11} \text{ godina}}$$

Više od osamsto milijardi godina — šezdeset puta dulje od dobi svemira.

$$11.25. v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 1,4 \cdot 1,989 \times 10^{30}}{10^4}} = \boxed{1,9 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

$$\frac{v_2}{c} = \boxed{0,64}$$

Dakle gotovo dvije trećine brzine svjetlosti — neutronska zvijezda je već na rubu onoga što opisuje Newtonova mehanika.

12. Skupovi, galaksije i kozmologija

12.1. Otvoreni imaju 10^2 – 10^3 zvijezda, mladi su (10^6 – 10^9 god) i leže u **disku**. Kuglasti imaju 10^5 – 10^6 zvijezda, stari su (10 – 13 mlrd god) i leže u **halou**.

12.2. Mjesto na kojem glavni niz skreće prema divovima. Oda je **masu zvijezde koja upravo sada napušta glavni niz**, a odatle i dob skupa preko $t = 10^{10} M^{-2,5}$.

12.3. Jer su nastale rano, prije nego što su generacije zvijezda i supernova stigle obogatiti međuzvjezdanu tvar težim elementima. Metale je trebalo **najprije napraviti**.

12.4. **Emisijske** (same svijetle, M42), **refleksijske** (raspršuju tuđu svjetlost, oko Plejada), **tamne** (zaklanjaju pozadinu, Konjska glava).

12.5. Jer neutralni atomski vodik ne svijetli u vidljivom, ali emitira na 21 cm. Ta valna duljina prolazi kroz prašinu, pa se njome može kartirati **cijela** Galaksija, uključujući područja skrivena iza središta.

12.6. $\boxed{\text{Spiralna galaktika s prečkom}}$, tipa SBbc.

12.7. Oko 8 kpc, a jedan ophod traje približno 230 milijuna godina.

12.8. Jer galaksije ne prelaze iz jednog tipa u drugi tim redom. Hubble je isprva mislio da je tako, pa su se zadržali nazivi „rane“ i „kasne“ — ali oni danas označavaju samo položaj u shemi, ne dob.

12.9. Pitanje zašto je noćno nebo tamno ako je svemir beskonačan i pun zvijezda. Razrješava se time što svemir **nije beskonačno star**: vidimo samo objekte čija je svjetlost stigla do nas. Širenje uz to crveno pomiče i slabi zračenje najudaljenijih izvora.

12.10. **Širenje** (Hubbleov zakon), **mikrovalno pozadinsko zračenje** od 2,725 K i **omjer vodika i helija** 75:25 koji odgovara predviđanju primordijalne nukleosinteze.

$$12.11. v = H_0 d = 70 \cdot 85 = \boxed{5950 \text{ km/s}}$$

$$12.12. \quad d = \frac{12\,000}{70} = \boxed{171 \text{ Mpc}}$$

$$12.13. \quad t = 10^{10} \cdot 0,85^{-2,5} = 10^{10} \cdot 1,50 = \boxed{1,5 \times 10^{10} \text{ god}}$$

To je nešto više od dobi svemira — znak da su ili podatci ili model približni; stvarni najstariji skupovi imaju oko 13 milijardi godina.

$$12.14. \quad z = \frac{658,9 - 656,3}{656,3} = \boxed{3,96 \times 10^{-3}}$$

$$v = zc = 1188 \text{ km/s}, \quad d = \frac{1188}{70} = \boxed{17 \text{ Mpc}}$$

To je otprilike udaljenost jata u Djevici.

$$12.15. \quad r = 15 \cdot 3,086 \times 10^{19} = 4,63 \times 10^{20} \text{ m}$$

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(2,20 \times 10^5)^2 \cdot 4,63 \times 10^{20}}{6,674 \times 10^{-11}} = 3,36 \times 10^{41} \text{ kg} = \boxed{1,7 \times 10^{11} M_{\odot}}$$

$$12.16. \quad H_0 = \frac{70}{3,086 \times 10^{19}} = 2,268 \times 10^{-18} \text{ s}^{-1}$$

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 4,41 \times 10^{17} \text{ s} = \boxed{14,0 \text{ mlrd godina}}$$

$$12.17. \quad T = 2,725 \cdot 11 = \boxed{30,0 \text{ K}} \text{ — svemir je tada bio topao kao Pluton danas.}$$

$$12.18. \quad A_V = 3,1 \cdot 0,60 = \boxed{1,86 \text{ mag}} \text{ — zvijezda nam izgleda gotovo šest puta slabijom nego što jest.}$$

12.19. Jer je paralaksa obrnuto razmjerna udaljenosti. Već pri 1 kpc iznosi $0,001''$, a najbliža je galaksija stotinu puta dalje — pomak bi bio 10^{-5} lučnih sekundi, daleko ispod svake mjerne mogućnosti.

12.20. Jer se **prostor širi svugdje jednako**. Nema povlaštenog središta; udaljenost između svaka dva para galaksija raste razmjerno njihovoj udaljenosti, pa svaki opažatelj vidi isti Hubbleov zakon oko sebe.

$$12.21. \quad (1 + z)^2 = 4$$

$$\frac{v}{c} = \frac{4 - 1}{4 + 1} = 0,60 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 1,8 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

Nerelativistički bi izašlo $v = c$, što je besmisleno — pri $z \geq 1$ klasična formula posve otkazuje.

$$12.22. \quad \rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \frac{3(2,268 \times 10^{-18})^2}{8\pi \cdot 6,674 \times 10^{-11}} = \boxed{9,2 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3}$$

$$\frac{9,2 \times 10^{-27}}{1,67 \times 10^{-27}} = \boxed{\approx 5,5 \text{ protona po m}^3}$$

Svemir je u prosjeku prazniji od najboljeg laboratorijskog vakuuma.

$$12.23. \quad r = 30 \cdot 3,086 \times 10^{19} = 9,26 \times 10^{20} \text{ m}$$

$$M = \frac{(2,50 \times 10^5)^2 \cdot 9,26 \times 10^{20}}{6,674 \times 10^{-11}} = \boxed{4,4 \times 10^{11} M_{\odot}}$$

Kako se ondje vidi vrlo malo zvijezda, gotovo sva ta masa mora biti **tamna tvar** — upravo je to najizravniji dokaz njezina postojanja.

$$12.24. \quad T = 2,725 \cdot 7,0 = \boxed{19,1 \text{ K}}$$

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{19,1} = \boxed{0,152 \text{ mm}}$$

Dakle u dalekom infracrvenom, umjesto u mikrovalnom području kao danas.

12.25. $\lambda_{\max} = \frac{2,898 \times 10^{-3}}{2,725} = 1,06 \times 10^{-3} \text{ m} = \boxed{1,06 \text{ mm}}$ — u **mikrovalnom** području, otud i naziv.

13. Sferna astronomija i računske tehnike

13.1. $1'' = \frac{1}{206\,265} = \boxed{4,85 \times 10^{-6} \text{ rad}}$

13.2. Zbroj je uvijek **veći** od 180° , a razlika $\varepsilon = A + B + C - 180^\circ$ zove se **sferni višak**. Površina trokuta razmjerna mu je: $S = R^2 \varepsilon$ (uz ε u radijanima).

13.3. $PZ = 90^\circ - \varphi$ (kolatituda), $PS = 90^\circ - \delta$ (polarna daljina) i $ZS = 90^\circ - h = z$ (zenitna daljina).

13.4. Jer arcsin ima **dva rješenja** u prvom i drugom kvadrantu, pa rezultat ostaje dvoznačan. Kosinusni i kotangensni poučak daju jednoznačan odgovor.

13.5. Za Sunce $h_0 = -0^\circ 50'$ (gornji rub, uz refrakciju od $34'$ i polumjer diska od $16'$), a za zvijezdu $h_0 = -0^\circ 34'$ — samo refrakcija.

13.6. Nautički sumrak traje dok Sunce ne padne na $\boxed{-12^\circ}$.

13.7. Saros traje 6585,32 dana, odnosno $\boxed{18 \text{ god } 11 \text{ d } 8 \text{ h}}$. Nakon njega ponavlja se gotovo ista geometrija Sunca, Zemlje i Mjeseca, pa i vrlo slična pomrčina.

13.8. Jer je Mjesečeva staza nagnuta $5,14^\circ$ prema ekliptici. Pomrčina je moguća samo ako se mlađak ili uštap dogodi blizu **čvora**, a Sunce prolazi kroz područje čvorova dvaput godišnje — to su **sezona pomrčina**.

13.9. $JD = \boxed{2\,451\,545,0}$. Decimala je ,0 jer julijanski dan počinje **u podne**, a J2000.0 je definiran upravo za 12^{h} 1. siječnja 2000.

13.10. Kako je $d = 1/p$, relativne su pogreške jednake: $\Delta d/d = \boxed{2\%}$.

13.11. $\cos H_0 = \frac{\sin(-0,833^\circ) - \sin 45,8^\circ \sin 23,1^\circ}{\cos 45,8^\circ \cos 23,1^\circ} = -0,4614$

$$H_0 = 117,47^\circ = 7^{\text{h}} 50^{\text{m}} \Rightarrow 2H_0 = \boxed{15^{\text{h}} 40^{\text{m}}}$$

13.12. Za $\delta = 0$: $\cos H = \sin h_0 / \cos \varphi$.

$$H_{-6^\circ} = 98,62^\circ, \quad H_{-0,83^\circ} = 91,20^\circ$$

$$\Delta H = 7,43^\circ = \boxed{29,7 \text{ minuta}}$$

13.13. $Y = 2027$, $M = 3$, $D = 21$; $A = 20$, $B = -13$.

$$\lfloor 365,25 \cdot 6743 \rfloor = 2\,462\,880, \quad \lfloor 30,6001 \cdot 4 \rfloor = 122$$

$$JD = 2\,462\,880 + 122 + 21 - 13 - 1524,5 = \boxed{2\,461\,485,5}$$

13.14. $s = \frac{\theta}{206\,265} d = \frac{1,496 \times 10^{11}}{206\,265} = 7,25 \times 10^5 \text{ m} = \boxed{725 \text{ km}}$

13.15. $\Delta \alpha = 2^{\text{h}} 4,5^{\text{m}} = 31,12^\circ$

$$\cos d = \sin 38,78^\circ \sin 45,28^\circ + \cos 38,78^\circ \cos 45,28^\circ \cos 31,12^\circ = 0,9143$$

$$\boxed{d = 23,9^\circ}$$

13.16. 14^h znači $H = 30^\circ$:

$$\tan \theta = \sin 45,8^\circ \tan 30^\circ = 0,7166 \cdot 0,5774 = 0,4138$$

$$\theta = 22,5^\circ$$

13.17. Uvjet je $\varphi + \delta_\odot - 90^\circ > -12^\circ$, dakle $\varphi > 78^\circ - 23,44^\circ = 54,6^\circ$. To je otprilike širina Kopenhagena i Moskve.

13.18. $\cos A_0 = \frac{\sin 23,44^\circ}{\cos 44,87^\circ} = 0,5612 \Rightarrow A_0 = 55,9^\circ$ od sjevera pri izlasku. Zalazak je zrcalno simetričan, pa je azimut $360^\circ - 55,9^\circ = 304,1^\circ$, dakle sjeverozapadno.

13.19. $X = \frac{1}{\sin 25^\circ} = 2,37$ — svjetlost prolazi kroz gotovo dva i pol puta deblji sloj zraka nego u zenitu.

13.20. Zbog **refrakcije**, koja podiže Sunce za oko $34'$, i zbog toga što se izlazak i zalazak računaju prema **gornjem rubu** diska, a ne prema središtu. Zajedno to dan produljuje za oko deset minuta.

$$13.21. \frac{\Delta f}{f} = \sqrt{(2 \cdot 0,03)^2 + (1 \cdot 0,05)^2} = \sqrt{0,0036 + 0,0025} = 7,8\%$$

13.22. Bez refrakcije: $\cos H_0 = -\tan 60^\circ \tan 23,44^\circ = -0,7511$, $H_0 = 138,67^\circ$.
S refrakcijom: $H_0 = 141,51^\circ$.

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 2,84^\circ}{15^\circ/\text{h}} = 22,7 \text{ minuta}$$

Na višim širinama refrakcija produljuje dan mnogo jače nego kod nas.

13.23. Visina Sunca u donjoj kulminaciji je $h_{\min} = \varphi + \delta_\odot - 90^\circ$. Astronomska noć izostaje ako Sunce ni tada ne padne ispod -18° :

$$\varphi + \delta_\odot - 90^\circ > -18^\circ \implies \varphi > 72^\circ - \delta_\odot$$

13.24. Na ekvatoru je $\varphi = 0$, pa je $\tan \theta = \sin 0^\circ \tan H = 0$ za svaki H — sve satne crte padaju jedna na drugu i sat ne pokazuje ništa. Razlog je što gnomon mora biti uspoređan s osi svijeta, a ona ondje leži **u ravnini horizonta**. Koristi se **ekvatorijalni** sat, kod kojega je ploha okomita na os svijeta i vrijedi jednostavno $\theta = H$.

13.25. Kutni promjer obrnuto je razmjeran udaljenosti, pa je $\frac{r_a}{r_p} = \frac{32,5}{31,5} = 1,0317$. Kako je $\frac{r_a}{r_p} = \frac{1+e}{1-e}$:

$$1,0317(1-e) = 1+e \Rightarrow e = \frac{0,0317}{2,0317} = 0,0156$$

Točna je vrijednost 0,0167; razlika potječe od zaokruživanja kutnih promjera.

14. Egzoplaneti i astrobiologija

14.1. **Tranzit** mjeri omjer polumjera $R_p/R_\star$; **radijalne brzine** mjere masu do na $\sin i$; **mikrolećenje** mjeri masu i udaljenost od zvijezde. (Uz njih idu i izravno snimanje te astrometrija.)

14.2. Jer tranzit daje samo **polumjer**, a radijalne brzine samo **masu**. Tek zajedno daju **gustoću**, a jedino ona razlikuje stjenoviti svijet od plinovitog.

14.3. Plinoviti div s periodom od nekoliko dana. Ondje je previše toplo da bi se led kondenzirao, pa jezgra ne bi mogla narasti dovoljno da zarobi plin — takvi su planeti nastali izvan linije leda i naknadno **migrirali** prema unutra.

$$14.4. \left(\frac{69\,911}{696\,000} \right)^2 = (0,1004)^2 = \boxed{1,0\%}$$

14.5. Jer Dopplerov efekt mjeri samo **radijalnu** komponentu njihanja zvijezde. Ako je staza nagnuta ($i < 90^\circ$), prava je amplituda veća od izmjerene, pa se dobiva $M_p \sin i$ — dakle donja granica.

14.6. Pojas oko zvijezde u kojem na površini planeta može postojati tekuća voda. Položaj ovisi o **luminozitetu** zvijezde, i to kao $d \propto \sqrt{L}$.

14.7. Zato što je planet velik *u odnosu na malu zvijezdu*, pa je tranzit dublji, a nastanjiva je zona blizu pa su periodi kratki i tranziti se često ponavljaju. Uz to je vjerojatnost $p = R_\star/a$ veća jer je a malo.

14.8. Rotacija sinkronizirana s ophodom, pa planet zvijezdi uvijek okreće istu stranu: jedna polovica ima vječni dan, druga vječnu noć. Problem je jer se plinovi mogu smrznuti na noćnoj strani, osim ako atmosfera nije dovoljno gusta da toplinu prenese.

14.9. Poznati su prva tri: $R_\star$ (brzina nastajanja zvijezda), f_p (udio sa planetima, blizu 1) i n_e (broj nastanjivih planeta po sustavu). Zadnja četiri — f_l , f_i , f_c i L — i dalje su **čista pretpostavka**.

14.10. Galaksija je stara 13 milijardi godina i civilizacija bi je i sporim brodovima prešla za nekoliko milijuna. Pa gdje su svi? Paradoks je u sukobu između te procjene i potpunog izostanka bilo kakvog traga.

$$14.11. \frac{R_p}{R_\star} = \sqrt{0,0040} = 0,0632$$

$$R_p = 0,0632 \cdot 696\,000 = 44\,000 \text{ km} \Rightarrow \boxed{6,9 R_\oplus}$$

Dakle planet veličine Neptuna.

$$14.12. P = 11/365,25 = 0,0301 \text{ god, pa je } P^{-1/3} = 3,21:$$

$$K = 28,4 \cdot 0,50 \cdot 1 \cdot 3,21 = \boxed{46 \text{ m/s}}$$

$$14.13. \sqrt{0,040} = 0,200, \text{ pa je}$$

$$d_{\text{unut}} = 0,95 \cdot 0,200 = \boxed{0,19 \text{ AJ}}, \quad d_{\text{vanj}} = 1,37 \cdot 0,200 = \boxed{0,27 \text{ AJ}}$$

$$14.14. p = \frac{R_\star}{a} = \frac{6,96 \times 10^8}{0,10 \cdot 1,496 \times 10^{11}} = \boxed{4,7\%}$$

$$14.15. R = 1,6 \cdot 6,371 \times 10^6 = 1,019 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{5,0 \cdot 5,97 \times 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi(1,019 \times 10^7)^3} = \boxed{6700 \text{ kg/m}^3}$$

Gustoća je veća od Zemljine (5514), dakle planet **jest stjenovit**, vjerojatno s velikom željeznom jezgrom.

$$14.16. T = 5772 \sqrt{\frac{6,96 \times 10^8}{2 \cdot 0,50 \cdot 1,496 \times 10^{11}}} \cdot (0,70)^{1/4} = 5772 \cdot 0,0682 \cdot 0,915 = \boxed{360 \text{ K}}$$

To je 87°C — pretoplo za nastanjivu zonu.

$$14.17. \left(\frac{58\,232}{696\,000} \right)^2 = \boxed{0,70\%}. \text{ Da — to je i za amaterske instrumente mjerljiva dubina, a svemirski teleskopi dosežu vrijednosti tisuću puta manje.}$$

$$14.18. M_p/M_J = 1,02 \times 10^{26} / 1,898 \times 10^{27} = 0,0538; P^{-1/3} = 164,8^{-1/3} = 0,1824:$$

$$K = 28,4 \cdot 0,0538 \cdot 0,1824 = \boxed{0,28 \text{ m/s} = 28 \text{ cm/s}}$$

To je iznad granice od 10 cm/s — Neptun bi, gledan izvana, danas bio mjerljiv, ali bi trebalo pratiti zvijezdu **stoljećima** da se period potvrdi.

$$14.19. d = 0,95\sqrt{0,0080} = 0,085 \text{ AJ. Iz trećeg Keplerovog zakona uz masu zvijezde:}$$

$$P = \sqrt{\frac{a^3}{M_\star}} = \sqrt{\frac{0,085^3}{0,25}} = 0,0495 \text{ god} = \boxed{18 \text{ dana}}$$

14.20. Zbog **pristranosti metoda**. Vjerojatnost tranzita je $p = R_\star/a$, pa bliski planeti imaju mnogo veće izgleda da budu viđeni. Uz to se kratki period unutar trajanja misije ponovi mnogo puta, a i amplituda radijalnih brzina raste kao $P^{-1/3}$. Katalog zato odražava osjetljivost instrumenata, a ne stvarnu raspodjelu.

$$14.21. \frac{R_p}{R_\star} = \sqrt{2,0 \times 10^{-4}} = 0,01414$$

$$R_p = 0,01414 \cdot 1,2 \cdot 696\,000 = 11\,810 \text{ km} \Rightarrow \boxed{1,85 R_\oplus}$$

To je **superzemlja** ili mini-Neptun — upravo područje radijusnog jaza, gdje je teško reći ima li planet debelu atmosferu ili je gol.

$$14.22. R = 1,5 \cdot 6,371 \times 10^6 = 9,56 \times 10^6 \text{ m}$$

$$\rho = \frac{5,0 \cdot 5,97 \times 10^{24}}{\frac{4}{3}\pi(9,56 \times 10^6)^3} = \boxed{8200 \text{ kg/m}^3}$$

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{6,674 \times 10^{-11} \cdot 2,99 \times 10^{25}}{(9,56 \times 10^6)^2} = \boxed{21,8 \text{ m/s}^2}$$

Dakle više od dva puta jača težina nego na Zemlji.

$$14.23. R_\star = 0,117 \cdot 6,96 \times 10^8 = 8,14 \times 10^7 \text{ m}, a = 0,029 \cdot 1,496 \times 10^{11} = 4,34 \times 10^9 \text{ m}$$

$$\sqrt{\frac{R_\star}{2a}} = \sqrt{\frac{8,14 \times 10^7}{8,68 \times 10^9}} = 0,0968$$

$$T_{\text{eq}} = 2560 \cdot 0,0968 \cdot 0,915 = \boxed{227 \text{ K}}$$

Zemlja bez staklenika ima 255 K, pa je ovo nešto hladnije — planet je **na vanjskom rubu** nastanjive zone. S dovoljno gustom atmosferom mogao bi imati tekuću vodu.

$$14.24. N = 2 \cdot 1,0 \cdot 0,20 \cdot 0,50 \cdot 0,10 \cdot 0,10 \cdot 10^4 = \boxed{20}$$

Dvadeset civilizacija u cijeloj Galaksiji — prosječno udaljenih tisućama svjetlosnih godina. Promijenite li samo L s 10^4 na 10^6 , dobit ćete 2000; upravo ta osjetljivost pokazuje da jednadžba nije predviđanje nego **popis onoga što ne znamo**.

$$14.25. t_{\text{tr}} \approx \frac{P}{\pi} \cdot \frac{R_\star}{a} = \frac{3,0 \cdot 24}{\pi} \cdot \frac{6,96 \times 10^8}{5,98 \times 10^9} = 22,9 \cdot 0,1164 = \boxed{2,7 \text{ sata}}$$

15. Relativistička i visokoenergetska astrofizika

15.1. Da unutar zatvorene kabine nije moguće razlikovati **ubrzanje od gravitacije**. Iz toga slijedi da gravitacija nije sila u običnom smislu, nego zakrivljenost prostorvremena.

$$15.2. r_s = \boxed{2,95 \text{ km}}$$

- 15.3.** Jer horizont događaja nije materijalna ploha nego **granica u prostoru vremenu**: mjesto iza kojega svi mogući putovi vode prema unutra. Kroz njega se prolazi bez ikakvog lokalnog osjeta.
- 15.4. Masa, spin i električni naboj.** Sve ostalo o tijelu koje je palo unutra nepovratno je izgubljeno.
- 15.5.** Područje izvan horizonta u kojem je prostor toliko povučen u vrtnju da se ništa ne može zadržati u mirovanju. Javlja se samo kod **rotirajućih** (Kerrovih) crnih rupa.
- 15.6.** Jer pretvara u energiju do $\eta = 0,42$ upadne mase, dok fuzija vodika u helij pretvara svega 0,007. Razlika je oko šezdeset puta u korist akrecije.
- 15.7. Jako** lećenje daje vidljive lukove, višestruke slike ili Einsteinov prsten. **Slabo** daje sitno statističko izduživanje oblika tisuća pozadinskih galaksija. **Mikrolećenje** daje kratkotrajno pojačanje sjaja pojedine zvijezde.
- 15.8.** Jer lećenje ovisi **isključivo o masi**, a ne o tome zrači li ta masa. Nije potrebna nikakva pretpostavka o prirodi tamne tvari niti o odnosu mase i svjetla.
- 15.9.** Jer mu magnetska os nije poravnata s osi vrtnje. Snop zračenja iz magnetskih polova prelazi preko nas jednom po okretu — isti mehanizam kao kod svjetionika.
- 15.10.** Magnetsko polje mu je do tisuću puta jače, do 10^{11} T. Energiju crpi iz raspada tog polja, a ne iz rotacije, i daje snažne bljeskove koji mjerljivo poremete Zemljinu ionosferu.

15.11. $r_s = 4,3 \times 10^6 \cdot 2,95 \text{ km} = \boxed{1,27 \times 10^7 \text{ km}}$

$$\frac{1,27 \times 10^{10} \text{ m}}{1,496 \times 10^{11}} = \boxed{0,085 \text{ AJ}}$$

Dakle petina Merkurove staze — golema crna rupa i dalje stane duboko unutar Sunčeva sustava.

15.12. $L_{\text{Edd}} = 1,26 \times 10^{31} \cdot 10 = \boxed{1,26 \times 10^{32} \text{ W}}$

$$\frac{1,26 \times 10^{32}}{3,828 \times 10^{26}} = \boxed{3,3 \times 10^5 L_{\odot}}$$

15.13. $r_{\text{ISCO}} = 3r_s = 3 \cdot 1,27 \times 10^7 = \boxed{3,8 \times 10^7 \text{ km} = 0,25 \text{ AJ}}$

15.14. $R = 0,010 \cdot 6,96 \times 10^8 = 6,96 \times 10^6 \text{ m}$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{GM}{Rc^2} = \frac{1,327 \times 10^{20}}{6,96 \times 10^6 \cdot 9,00 \times 10^{16}} = \boxed{2,1 \times 10^{-4}}$$

$$v = zc = \boxed{64 \text{ km/s}}$$

Stotinu puta više nego kod Sunca — kod bijelih patuljaka taj se pomak mora oduzeti prije nego što se iz spektra računa pravo gibanje.

15.15. $\dot{M} = \frac{L}{\eta c^2} = \frac{10^{38}}{0,10 \cdot 9,00 \times 10^{16}} = 1,11 \times 10^{22} \text{ kg/s}$

$$\dot{M} = 1,11 \times 10^{22} \cdot 3,156 \times 10^7 = 3,5 \times 10^{29} \text{ kg/god} = \boxed{0,18 M_{\odot} \text{ godišnje}}$$

15.16. $\theta = \frac{4GM}{c^2 R} = \frac{4 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 1,898 \times 10^{27}}{9,00 \times 10^{16} \cdot 6,99 \times 10^7} = 8,06 \times 10^{-8} \text{ rad} = \boxed{0,017''}$

Sto puta manje nego kod Sunca, ali i to je danas mjerljivo radiointerferometrijom.

$$15.17. r_s = \frac{2 \cdot 6,674 \times 10^{-11} \cdot 5,97 \times 10^{24}}{9,00 \times 10^{16}} = 8,85 \times 10^{-3} \text{ m} = \boxed{8,9 \text{ mm}}$$

15.18. Zbog dvaju suprotstavljenih učinaka: sat na satelitu ide **brže** jer je više u gravitacijskom polju (opća relativnost, $+45 \mu\text{s}/\text{dan}$) i **sporije** jer se giba (specijalna relativnost, $-7 \mu\text{s}/\text{dan}$). Neto korekcija je $38 \mu\text{s}$ dnevno; bez nje bi položaj promašivao oko 10 km na dan.

15.19. **Dugi** ($> 2 \text{ s}$) nastaju kolapsom jezgre vrlo masivne zvijezde u crnu rupu i prate ih supernove tipa Ic. **Kratki** ($< 2 \text{ s}$) nastaju spajanjem dviju neutronske zvijezde i prate ih kilonove.

15.20. Jer su kozmičke zrake **nabijene čestice**, pa ih međuzvjezdana i međugalaktička magnetska polja putem skreću — smjer dolaska nema veze sa smjerom izvora. Neutrini su električki neutralni i gotovo ne stupaju u međudjelovanje, pa dolaze pravocrtno.

$$15.21. r_s = 10 \cdot 2,95 = 29,5 \text{ km}$$

$$\rho = \frac{10 \cdot 1,989 \times 10^{30}}{\frac{4}{3}\pi(2,95 \times 10^4)^3} = \boxed{1,8 \times 10^{17} \text{ kg/m}^3}$$

To je istog reda veličine kao gustoća neutronske zvijezde ($6,6 \times 10^{17}$) — zvjezdana crna rupa i neutronska zvijezda vrlo su blizu jedna drugoj. Kod supermasivnih rupa gustoća pada s M^{-2} i postaje manja od gustoće vode.

$$15.22. r = 3r_s = 8,85 \times 10^4 \text{ m}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{6,93 \times 10^{14}}{1,327 \times 10^{21}}} = \boxed{4,5 \text{ ms}}$$

Tvar dakle obiđe crnu rupu više od dvjesto puta u sekundi — otud brze promjene sjaja u rendgenskom području.

$$15.23. E = 3,0 M_\odot c^2 = 3,0 \cdot 1,79 \times 10^{47} = \boxed{5,4 \times 10^{47} \text{ J}}$$

$$\frac{5,4 \times 10^{47}}{10^{44}} = \boxed{\approx 5000 \times}$$

U djeliću sekunde oslobodi se tisućama puta više energije nego što Sunce izrači u deset milijardi godina.

$$15.24. v = \frac{2\pi R}{P} = \frac{2\pi \cdot 10^4}{1,4 \times 10^{-3}} = \boxed{4,5 \times 10^4 \text{ km/s}}$$

$$\frac{v}{c} = \boxed{0,15}$$

Petnaest posto brzine svjetlosti — zato se pri modeliranju pulsara relativistički učinci ne smiju zanemariti.

$$15.25. t = \frac{10^{45}}{3,828 \times 10^{26}} = 2,61 \times 10^{18} \text{ s}$$

$$t = \frac{2,61 \times 10^{18}}{3,156 \times 10^7} = \boxed{8,3 \times 10^{10} \text{ godina}}$$

Osamdeset milijardi godina — šest puta dulje od dobi svemira, a bljesak to oslobodi u nekoliko sekundi.

16. Praktikum: opažanje, mjerenje i obrada podataka

16.1. Jer tamna struja raste **i s vremenom i s temperaturom**, i to eksponencijalno s temperaturom. Dark snimljen na drukčijim uvjetima oduzeo bi krivu količinu i ostavio ili višak ili manjak signala.

- 16.2.** *Bias* je najkraća moguća ekspozicija sa zatvorenim zatvaračem i uklanja samo **stalni električni odmak** elektronike. *Dark* traje jednako dugo kao snimka i uz odmak uklanja i **tamnu struju** te vruće piksele.
- 16.3.** Jer krivulja sjaja treba **vremenski niz**, a ne jednu duboku snimku. Svaka se snimka mjeri zasebno i daje jednu točku na krivulji; slaganjem bi se izgubila upravo ona informacija koja se traži.
- 16.4.** Druga zvijezda u polju za koju se zna da je stalna. Ako je obrada ispravna, njezina krivulja mora ispasti **ravna**. Ako nije, ili usporedna zvijezda nije stalna ili nešto ne valja u kalibraciji — to je jedina ugrađena kontrola koju metoda ima.
- 16.5.** Jer atmosfera slabi plavu svjetlost jače od crvene, i to sve jače kako zračna masa raste. Razlikuju li se objekt i usporedna po boji, kroz noć se u krivulji pojavi **lažni trend** koji nema veze sa zvijezdom.
- 16.6.** Jer blago raspršena zvijezda pokriva više piksela, pa manje pati od razlika u osjetljivosti između njih i teže dolazi u zasićenje. Oštrina ionako ne donosi ništa — mjeri se ukupan broj elektrona, a ne izgled.
- 16.7.** Namjeran pomak polja za nekoliko piksela između snimaka. Time loši i vrući pikseli ne padaju uvijek na isto mjesto na nebu, pa se pri slaganju uklone.
- 16.8.** Jer je UTC jednoznačan i neovisan o vremenskoj zoni i ljetnom računanju vremena. Mjerenja iz raznih zemalja moraju se moći usporediti bez ikakve dvojbe — a i pretvorba u julijanski datum polazi od UT-a.
- 16.9.** Da je pojava nastupila **kasnije** nego što je proračunato. Sustavno rastući O–C znači da je period u efemeridi prekratak, pa ga treba osvježiti; periodično promjenjiv O–C može odati i treće tijelo u sustavu.
- 16.10.** Jer zračna masa ondje prelazi 2, pa se gubi previše svjetlosti, a atmosferska disperzija i nestabilnost slike naglo rastu. Fotometrija ispod te granice postaje nepouzdana.

$$16.11. \sigma_m = \frac{1,0857}{250} = \boxed{0,0043 \text{ mag}}$$

- 16.12.** Kako je $S/N \propto \sqrt{t}$, za tri puta bolji omjer treba **devet puta** dulje:

$$t = 9 \cdot 45 = \boxed{405 \text{ s} \approx 6,8 \text{ min}}$$

$$16.13. \frac{206\,265}{750} = 275,0 \text{ ''/mm, pa je}$$

$$275,0 \cdot 0,0054 = \boxed{1,49 \text{ ''/piksel}}$$

$$16.14. \sigma_1 = \frac{1,0857}{80} = 0,0136 \text{ mag}$$

$$\sqrt{N} = \frac{0,0136}{0,004} = 3,39 \Rightarrow N = 11,5 \Rightarrow \boxed{12 \text{ snimaka}}$$

- 16.15.** Šum neba: $80 \cdot 150 = 12\,000$; šum očitavanja: $80 \cdot 81 = 6480$.

$$\frac{S}{N} = \frac{60\,000}{\sqrt{60\,000 + 12\,000 + 6480}} = \frac{60\,000}{280,1} = \boxed{214}$$

$$16.16. \Delta m = 13,204 - 12,688 = 0,516$$

$$m_{\text{var}} = 11,350 + 0,516 = \boxed{11,866}$$

16.17. $O - C = 0,318 - 0,295 = +0,023$ d

$$0,023 \cdot 1440 = \boxed{+33 \text{ minute}}$$

16.18. Jedan okret nepravilnog asteroida daje **dva** maksimuma i dva minimuma, pa ponavljanje uzorka odgovara polovici okreta:

$$P = 2 \cdot 3,7 = \boxed{7,4 \text{ sata}}$$

16.19. $X = \frac{1}{\sin 35^\circ} = \boxed{1,74}$

16.20. Jer preuska apertura izostavlja dio svjetlosti zvijezde, i to **promjenjiv dio** — koliko će ostati vani ovisi o seeingu, koji se mijenja iz snimke u snimku. To u krivulju unosi šum veći od onoga koji se htjelo izbjeći. Optimum je apertura oko 2–3 puta šira od zvjezdane mrlje.

16.21. $\frac{S}{N} = \frac{1,0857}{0,012} = \boxed{90}$

16.22. Dubina u magnitudama: $\Delta m = 2,5 \log \frac{1}{0,988} = 0,0131$ mag. Traži se $\sigma_m = 0,0131/3 = 0,00437$ mag:

$$\frac{S}{N} = \frac{1,0857}{0,00437} = \boxed{248}$$

16.23. Jer Zemlja tijekom godine mijenja položaj na stazi, pa svjetlost do nas putuje različito dugo. Razlika doseže vrijeme koje svjetlosti treba da prijeđe 1 AJ, dakle $\boxed{\pm 8,3 \text{ minute}}$. Bez te korekcije trenutci minimuma izmjereni u različitim mjesecima ne bi bili međusobno usporedivi, a O–C dijagram pokazivao bi lažni godišnji val.

16.24. $\frac{40}{0,60} = \boxed{67 \text{ piksela}}$ po promjeru. To je sasvim dovoljno — za planetarno snimanje traži se barem tridesetak piksela po disku, a idealno je da skala bude oko 1/3 moći razlučivanja teleskopa.

16.25. $\sigma_1 = \frac{1,0857}{150} = 0,00724$ mag

$$\sqrt{N} = \frac{0,00724}{0,002} = 3,62 \Rightarrow N = 13,1 \Rightarrow 14 \text{ snimaka}$$

$$t = 14 \cdot 30 \text{ s} = \boxed{7 \text{ minuta}}$$

Tablica konstanti

Fizikalne konstante

Veličina	Oznaka	Vrijednost
Gravitacijska konstanta	G	$6,674 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Brzina svjetlosti	c	$2,998 \times 10^8 \text{ m/s}$
Planckova konstanta	h	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
Boltzmannova konstanta	k	$1,381 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Stefan-Boltzmannova konstanta	σ	$5,670 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Wienova konstanta	b	$2,898 \times 10^{-3} \text{ m K}$
Atomska jedinica mase	u	$1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa protona	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Masa elektrona	m_e	$9,109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Elektronvolt	eV	$1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$
Umnožak hc	hc	1240 eV nm
Thomsonov presjek	σ_T	$6,652 \times 10^{-29} \text{ m}^2$

Astronomske jedinice i pretvorbe

Astronomska jedinica	AJ	$1,496 \times 10^{11} \text{ m}$
Parsek	pc	$3,086 \times 10^{16} \text{ m} = 206\,265 \text{ AJ} = 3,262 \text{ ly}$
Svjetlosna godina	ly	$9,461 \times 10^{15} \text{ m} = 63\,241 \text{ AJ}$
Julijanska godina	god	$3,156 \times 10^7 \text{ s}$
Radijan	rad	$57,296^\circ = 3438' = 206\,265''$
Zvezdani dan		$23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}} = 86\,164 \text{ s}$
Nagib ekliptike	ε	$23,44^\circ$
Kilotona TNT-a	kt	$4,184 \times 10^{12} \text{ J}$

Sunce

Masa	$M_\odot$	$1,989 \times 10^{30} \text{ kg}$
Polumjer	$R_\odot$	$6,957 \times 10^8 \text{ m} = 696\,000 \text{ km}$
Luminozitet	$L_\odot$	$3,828 \times 10^{26} \text{ W}$
Površinska temperatura	$T_\odot$	5772 K
Temperatura jezgre		$1,57 \times 10^7 \text{ K}$
Gustoća jezgre		$1,5 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$
Gravitacijski parametar	$GM_\odot$	$1,327 \times 10^{20} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Solarna konstanta	S	1361 W/m^2
Apsolutna magnituda	$M_{\odot,V}$	$+4,83 \quad (M_{\text{bol}} = +4,74)$
Prividna magnituda	$m_\odot$	$-26,74$
Schwarzschildov polumjer	r_s	$2,95 \text{ km}$
Energija mirovanja	$M_\odot c^2$	$1,79 \times 10^{47} \text{ J}$

Zemlja i Mjesec

Masa Zemlje	$M_{\oplus}$	$5,972 \times 10^{24}$ kg
Polumjer Zemlje	$R_{\oplus}$	6371 km
Gravitacijski parametar	$GM_{\oplus}$	$3,986 \times 10^{14}$ m ³ /s ²
Srednja gustoća		5514 kg/m ³
Prva kozmička brzina	v_1	7,91 km/s
Brzina bijega	v_2	11,19 km/s
Orbitalna brzina		29,78 km/s
Ekscentricitet staze	e	0,0167
Masa Mjeseca		$7,342 \times 10^{22}$ kg
Polumjer Mjeseca		1737 km
Udaljenost Mjeseca		$3,844 \times 10^8$ m
Sinodički mjesec	29,53 d	(siderički 27,32 d)

Planeti

Planet	a [AJ]	T [god]	M [$M_{\oplus}$]	R [$R_{\oplus}$]	ρ [kg/m ³]	v_2 [km/s]
Merkur	0,387	0,241	0,055	0,383	5427	4,25
Venera	0,723	0,615	0,815	0,949	5243	10,36
Zemlja	1,000	1,000	1,000	1,000	5514	11,19
Mars	1,524	1,881	0,107	0,532	3933	5,03
Jupiter	5,204	11,86	317,8	11,21	1326	59,5
Saturn	9,583	29,46	95,2	9,45	687	35,5
Uran	19,19	84,01	14,5	4,01	1271	21,3
Neptun	30,07	164,8	17,1	3,88	1638	23,5

Zvijezde i kozmologija

Masa Jupitera	M_J	$1,898 \times 10^{27}$ kg = $318 M_{\oplus}$
Polumjer Jupitera	R_J	69 911 km = $11,21 R_{\oplus}$
Chandrasekharova granica		$1,44 M_{\odot}$
Hubbleova konstanta	H_0	$70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$
Hubbleovo vrijeme	$1/H_0$	$1,40 \times 10^{10}$ god
Dob svemira		$1,38 \times 10^{10}$ god
Temperatura CMB-a	T_0	2,725 K
Kritična gustoća	ρ_c	$9,2 \times 10^{-27}$ kg/m ³
Sastav svemira		5 % tvar, 27 % tamna tvar, 68 % tamna energija

Korisne relacije

Treći Keplerov zakon	$T^2 = a^3$ (god, AJ) ili $M_1 + M_2 = a^3/T^2$ ($M_{\odot}$)
Modul udaljenosti	$m - M = 5 \log d [\text{pc}] - 5 + A$
Odnos mase i sjaja	$L/L_{\odot} = (M/M_{\odot})^{3,5}$
Vijek na glavnom nizu	$t \approx 10^{10} (M/M_{\odot})^{-2,5}$ god
Moć razlučivanja	$\theta'' \approx 138/D [\text{mm}]$
Skala slike	$206\,265''/f [\text{mm}]$
Ravnotežna temperatura	$T = 278,3 \text{ K} \cdot (1 - A)^{1/4} / \sqrt{d [\text{AJ}]}$
Schwarzschildov polumjer	$r_s = 2,95 \text{ km} \cdot (M/M_{\odot})$

Vrijednosti su zaokružene na četiri značajne znamenke. Za natjecanje je dovoljno pamtiti redove veličine — ostalo se dobiva u zadatku.